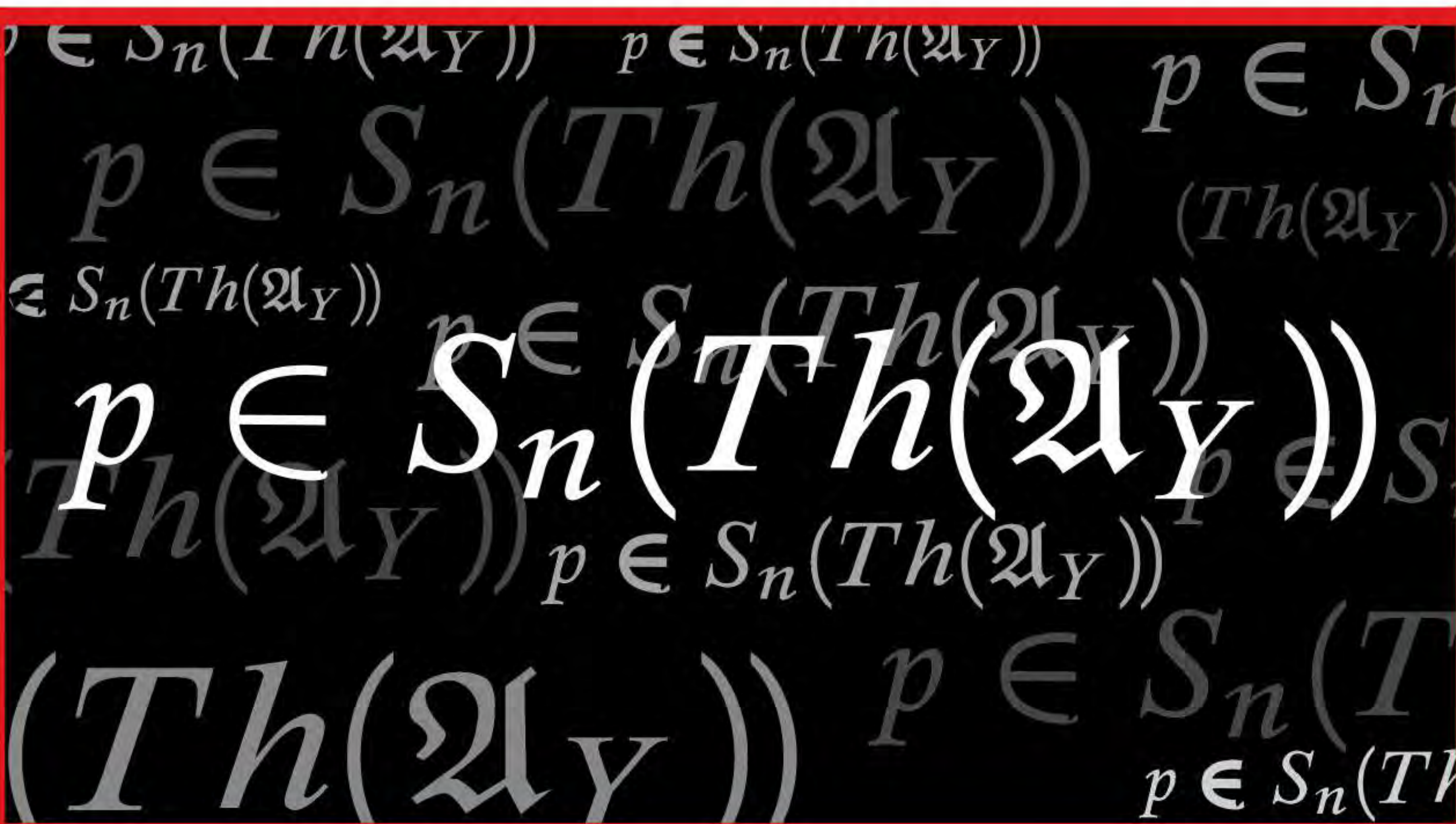
No. 6 / noviembre 2008

EPG

ISSN 1909-7433

RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS BÁSICAS

PANORAMA



Politecnico Grancolombiano
Institución Universitaria
Member of Whitney International University System

Departamento de Investigación
Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Editorial

Resulta difícil imaginar lo que resta del siglo XXI sin tener en cuenta los invaluables aportes de la ciencia. Sostenida sobre la base de disciplinas como la Ingeniería y las Matemáticas, está comprometida en el futuro próximo, con la aplicación de sus conocimientos en beneficio de la humanidad.

Consciente de esa gran responsabilidad, la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas del Politécnico Grancolombiano ha venido desarrollando proyectos investigativos de aplicación en campos específicos del conocimiento.

Así, en esta entrega de PANORAMA, se presenta por parte del grupo de Ingeniería Industrial, un documento que revisa los modelos teóricos para el control de inventarios, aplicable a las necesidades reales de la pyme colombiana. Por su parte, el área de Matemáticas formula una serie de aplicaciones del Algebra Booleana a la Teoría de Modelos. Adicionalmente, un grupo de investigación realiza una valiosa reflexión sobre los propósitos de los cursos de matemáticas dictados a estudiantes colombianos recién ingresados en el sistema universitario.

Es un propósito de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas, el Departamento de Investigación y la Editorial Politécnico Grancolombiano, el seguir estimulando este tipo de estudios. Por ello, es preciso compartir con la comunidad académica sus resultados, pues sólo de la socialización, el análisis y el diálogo, será posible generar nuevas inquietudes que abran campo al desarrollo de la ciencia en Colombia y que permitan ir al tanto de la carrera científica del siglo que ya ha empezado.

Clemencia Camacho Delgado
Directora Departamento de Investigación

Modelos para el control de inventarios en las pymes

CARLOS OSORIO GARCÍA
caosorio@poligran.edu.co

RESUMEN

El propósito fundamental de una cadena de abastecimiento consiste en maximizar el valor de la organización, al tiempo que se satisfacen los requerimientos del cliente. En el cumplimiento de este objetivo deben participar de manera coordinada e integrada todos los actores involucrados en la cadena. Recientemente, las empresas han comprendido que la aplicación de buenas prácticas es sinónimo de integración, la cual empieza por la coordinación operativa de áreas tales como compras, transporte e inventarios, entre otras. La gestión de inventarios es relevante en este proceso de unificación, ya que refleja tanto la inversión realizada por los dueños de la empresa, como la capacidad de generar buenos niveles de servicio al cliente. Sin embargo, la administración de inventarios puede llegar a ser una actividad muy compleja por la incertidumbre que la rodea y la naturaleza misma de los productos que se gestionan. Esa complejidad puede manejarse por medio de los modelos de inventarios integrados en sistemas de información transaccionales, llamados "sistemas de soporte para la toma de decisiones" (SSD).
Este documento revisa los modelos teóricos para el control de inventarios que se pueden ajustar a las necesidades reales de la pyme colombiana, así como los elementos por considerar para alcanzar la integración de estos modelos y conformar un sistema para la toma de decisiones.

PALABRAS CLAVE

Cadena de abastecimiento, control de inventarios, sistema de soporte para la toma de decisiones, administración, pyme.

ABSTRACT

The primary purpose of a supply chain is to maximize the value of the organization, while also satisfying the customer's requirements. In the fulfilling of this objective, all those involved in the chain should participate in a coordinated and integrated way. Recently, companies have realized that the application of good practices is synonymous with integration, which starts with the coordination of operational areas such as shopping, transportation and inventory, among others. Inventory management is important in this process of unification, as it reflects both the investment made by the owners of the company, such as the ability to generate good levels of customer service. However, the inventory management can become a very complicated activity due the uncertainty that surrounds it and the very nature of the products that are managed. This complexity can be managed through integrated models of inventories in information systems transactional, called "support systems for decision making" (SSD).

This paper reviews the theoretical models for inventory control that can be adjusted to the real needs of the Colombian SME, and the elements to be considered to achieve the integration of these models and establish a system for decision making.

KEY WORDS

Supply chain, inventory control, support systems for decisión making, pyme (SME).

I. INTRODUCCIÓN

El control de inventarios es uno de los temas más complejos en Logística y Gestión de la Cadena de Abastecimiento. Con frecuencia se escucha a los administradores, gerentes y responsables de la gestión logística afirmar que uno de sus principales problemas a los que se deben enfrentar es la administración de los inventarios. Uno de los problemas típicos, por ejemplo, es la existencia de excesos y de faltantes. Lo interesante de este problema es que ocurre prácticamente en cualquier empresa del sector industrial, comercial o de servicios, que manejan, de alguna u otra forma, materias primas, componentes, repuestos, insumos y/o productos terminados, que mantienen en inventario en mayor o menor medida. Las causas principales para acudir a la necesidad del mantener inventarios en cualquier organización son las fluctuaciones aleatorias de la demanda y de los tiempos de entrega de pedidos. Los inventarios también surgen del desfase que existe entre la demanda de los consumidores y la producción o suministro de dichos productos. Sin embargo, se pueden atenuar estas causas mediante una o más de las siguientes estrategias:

•La obtención de información precisa y en tiempo real sobre la demanda en el punto de consumo. A mayor información disponible oportunamente, la planeación será mucho más fácil y eficaz.

•La consolidación de centros de distribución y bodegas para aumentar los volúmenes de demanda por instalación, ya que más altos volúmenes de demanda conducen generalmente a menores niveles de variabilidad de la misma.

•La estandarización de productos para evitar el mantenimiento de inventarios de una gran diversidad de ítems que sólo difieren en aspectos menores de forma, color, condición, etc. Las características finales del producto pueden ser implementadas en el momento de recibir las órdenes de los clientes.

•El mejoramiento de los sistemas de pronósticos de demanda a través de técnicas estadísticas ampliamente reconocidas.

•El mejoramiento de alianzas y de sistemas de comunicación con proveedores y clientes para la reducción de tiempos de entrega.
•La emisión de órdenes conjuntas para diversos grupos de ítems con el objeto de balancear su inventario y la consolidación de despachos desde o hacia las localidades, utilizando instalaciones como el cross-docking

•La reducción de demoras a lo largo de toda la cadena de abastecimiento, incluyendo los tiempos de tránsito en los sistemas de transporte.

Debido a que las causas que generan la necesidad de mantener inventarios no pueden ser eliminadas totalmente, la mejor alternativa es aplicar sistemas óptimos de gestión y control para responder a dichas causas. El problema en la mayoría de las organizaciones, especialmente hablando de las pymes, radica en que los inventarios de seguridad y sus correspondientes puntos de reordenamiento (o inventarios máximos) se determinan exclusivamente con base en el promedio de la demanda, ignorando su variabilidad.

Por lo tanto, es un error conceptual grave, definir inventarios de seguridad y puntos de reorden de un ítem proporcionalmente a su demanda promedio en forma exclusiva. De aquí precisamente provienen los desbalances de inventario mencionados anteriormente. Sólo en algunas ocasiones los inventarios de seguridad y los puntos de reorden calculados solamente con base en la demanda promedio, coinciden con el valor óptimo obtenido como resultado de un análisis estadístico formal. La clave consiste entonces en liberar capital invertido en inventarios de seguridad de ítems con baja variabilidad y distribuirlo en inventarios de seguridad de ítems con alta variabilidad. El balance de esta operación es frecuentemente positivo y el servicio al consumidor se puede mejorar significativamente sin invertir un peso adicional en inventarios, se puede mantener el servicio actual si es el adecuado, con mucho menos capital invertido, o se puede diseñar una combinación intermedia de ambos beneficios.
La solución a estos problemas frecuentes de desbalance de inventarios es la de diseñar e implementar estrategias adecuadas de control, a través de las siguientes alternativas:
•Utilización de sistemas adecuados de pronósticos de demanda, que permitan estimar con precisión el patrón, el promedio y la variabilidad de la demanda de cada ítem

que se mantenga en inventario. De esta forma, los inventarios de seguridad se calculan proporcionalmente a la variabilidad de la demanda, de acuerdo con el nivel de servicio deseado, y no proporcionalmente al promedio de la misma. Debe minimizarse las causas frecuentes de errores excesivos en los pronósticos, tales como la selección del modelo matemático inadecuado, la utilización de datos poco confiables y de datos de ventas en lugar de demanda, los sesgos en los pronósticos, la inclusión de datos atípicos y la selección errada del período fundamental del pronóstico.

•Medición adecuada de los tiempos de entrega y su variabilidad.

•Implementación de la clasificación ABC para establecer prioridades de administración y diferenciar los sistemas de control de ítems en cada categoría.

•Definición de los lugares más adecuados dentro de la cadena de abastecimiento donde se deben mantener inventarios, y determinación de sus niveles correspondientes.

•Consideración de aspectos fundamentales tales como el ciclo de vida del producto, la naturaleza del proceso productivo en estudio y los aspectos financieros relacionados con inventarios, tales como los plazos de pago y sus descuentos asociados.

•Generación de indicadores de eficiencia que consideren simultáneamente todas las variables de interés. Es un error medir el desempeño de un sistema de control de inventarios por la rotación del mismo y querer mejorarla, incluso a costa del nivel de servicio ofrecido al cliente.

II. POLÍTICAS GENERALES DE CONTROL

Al igual que cualquier tipo de sistema, los inventarios necesitan la presencia e implementación de una política confiable de control. La elección del sistema de control depende de la complejidad del escenario de operación, el número de ítems que se necesitan controlar, el número de instalaciones donde se puede almacenar el inventario, y la disponibilidad de la información en tiempo real. En este orden de ideas, las políticas de control de inventarios se pueden dividir en tres grandes grupos:
•Control de inventarios de distribución
•Control de inventarios de manufactura
•Control situacional

2.1. Control de Inventarios de Distribución

DistribuciónDentro de esta modalidad de control, existen seis políticas de control que a su vez se pueden organizar en dos subcategorías:

•Control manual
- Sistema Two-Bin (2BS)
- Revisión Visual

•Esquemas básicos de reabastecimiento
- Punto de reorden con lotes económicos de pedido.
- Punto de reorden con lotes dependientes del nivel de inventario.
- Revisión periódica con lotes dependientes del nivel de inventario.
- Revisión periódica con puntos de reorden y lotes dependientes del nivel de inventario.

Sistema Two-Bin

Lo conforman dos locaciones o instalaciones que manejen un ítem en particular. Cuando se agota el inventario en una de las instalaciones, se lanza una orden para cubrir el producto faltante, de esta manera se ve afectado el nivel de inventario de la otra instalación. El sistema Two-Bin es bastante común en operaciones pequeñas de manufactura, donde una instalación puede ser una estiba que tenga componentes en una estación de ensamble. Su principal ventaja es su simplicidad, mientras que la desventaja más importante es la falta de confiabilidad en aquellos casos en que los operadores no tienen la disciplina de monitorear los niveles de inventario.

Revisión visual

En este sistema, el inventario disponible se inspecciona de manera visual, y con base en el juicio del inspector, se lanza la orden o el pedido de reabastecimiento para determinado ítem. Al igual que con los sistemas 2BS, la principal ventaja es su simplicidad, la desventaja es la falta de confiabilidad si la mano de obra es indisciplinada.

Puntos de reorden con lotes económicos de pedido (EOQ)

Bajo revisión continua, se ordena el lote económico de pedido cuando el nivel de inventario alcanza el punto de reorden. Este punto se fija teniendo como base el inventario de seguridad y la demanda pronosticada durante el plazo de entrega. La principal ventaja es que utiliza el modelo EOQ, el cual minimiza la suma de los costos de ordenar y almacenar. Por otro lado, la desventaja principal es la necesidad de revisar continuamente los niveles de inventario.

Puntos de reorden con lotes dependientes del nivel de inventario

Bajo revisión continua, se lanza un pedido que corresponde a una cantidad variable suficiente para tener existencias cercanas al nivel deseado, siempre y cuando se haya llegado al punto de reorden. Este nivel está afectado por la probabilidad de incurrir en faltantes durante el plazo de entrega de un pedido.

Revisión periódica con lotes dependientes del nivel de inventario

Cada vez que se cumple un periodo de revisión, se ordena una cantidad de abastecimiento, que puede ser variable, dependiendo del nivel que se posea de inventario. La principal desventaja de este sistema es el exceso de inventarios que se puede requerir para soportar esta política. Otra desventaja aparece cuando se presenta demanda estacional, pues aumenta la probabilidad de incurrir en faltantes, si esta estacionalidad no es tenida en cuenta antes de que se cumpla un periodo de revisión.

Revisión periódica con puntos de reorden y lotes dependientes del nivel de inventario

Este sistema se diferencia con el anteriormente descrito en que el nivel de inventario que se determina para realizar el pedido correspondiente al punto de reorden. La principal ventaja es que posee el costo global más económico de los sistemas anteriores. Sin embargo, el esfuerzo computacional es considerable y no se justifica tal esfuerzo para ítems de clase B o C.

III. CONTROL CONJUNTO DE ITEMS

Todos los métodos de control descritos anteriormente especialmente se refieren a un ítem en particular. Normalmente, la administración está interesada en el control conjunto de varios ítems en forma simultánea. Esto se debe al hecho de que dichos ítems pueden ser suministrados por un mismo proveedor, o comparten un mismo modo de transporte, o son producidos en las mismas máquinas o línea de producción.

Existen diversas ventajas cuando se realiza control conjunto, a saber:

•Ahorros en precios unitarios de compra, ya que, al efectuar la coordinación, se pueden lograr los tamaños de orden mínimos impuestos por el proveedor para otorgar cierto descuento. Igualmente, se pueden lograr economías de escala al utilizar medios de transporte con cierto volumen mínimo.

•Ahorro en los costos totales de ordenamiento, ya que al incluir más ítems en una orden sencilla, es posible disminuir el número anual de órdenes.

•Facilidad de programación, en cuanto a recepción de materiales, inspección, etcétera. En efecto, muchas empresas piensan en pedidos realizados por proveedor, en lugar de considerar ítems individuales.

Por otra parte, algunas desventajas al realizar la coordinación también pueden ocurrir:
•Incremento en el nivel promedio de inventario, debido a que algunos ítems pueden ser incluidos en una orden antes de que alcancen su punto de reorden.
•Incremento en los costos de control, debido a la necesidad misma de la coordinación de varios ítems. Estos consisten específicamente en los costos de revisión, costos de procesamiento, de hardware y software.

•Reducción de flexibilidad, especialmente con respecto de los niveles de servicio de ítems individuales.

3.1. Curvas de intercambio

Normalmente, la administración de un sistema de inventarios está interesada en medidas agregadas de eficiencia, constituidas por varios ítems individuales. Esta idea da más información globalizada para la toma de decisiones. Por ejemplo, es difícil en muchas ocasiones determinar valores aproximados del costo de ordenamiento S y del costo de mantenimiento del inventario h. Por lo tanto, se recurre a las denominadas curvas de intercambio, las cuales reúnen a varios ítems individuales y pueden servir para estimar valores de S y/o h.

Considerando varios ítems, las medidas agregadas de eficiencia más comunes son las siguientes (generalmente son referidas a un año, pero puede utilizarse otra unidad de tiempo):

•Máximo costo total anual del inventario promedio
•Máximo costo fijo total (o número total) de reposiciones por año
•Máximo valor de faltantes por año
•Máxima demora permitida de órdenes pendientes

3.1.1. Curvas de intercambio determinísticas

Considérese los siguientes parámetros y variables (asúmase una situación de demanda aproximadamente constante):

S = Costo de ordenamiento, común para todos los ítems. Si este no es el caso, se puede definir un costo de ordenamiento Si para cada ítem i, en \$/orden

Di = Demanda anual del ítem i en unidades/año

n = Número de ítems considerados en el análisis

Qi = Tamaño de pedido del ítem i en unidades

vi = Valor unitario del ítem i en \$/unidad

El inventario cíclico promedio total viene dado por:

$$ICPT = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i v_i}{2} \quad (1)$$

Y el número total de reposiciones o ciclos por año viene dado por:

$$N = \sum_{i}^{n} \frac{D_i}{Q_i} \quad (2)$$

Como se está utilizando la cantidad óptima de pedido EOQ para cada ítem, se tiene que:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2SD_i}{v_i h}} \quad (3)$$

Por lo tanto, al reemplazar (3) en (1) y (2), se obtiene:

$$ICPT = \sum_{i}^{n} \sqrt{\frac{SD_i v_i}{h}} \quad (4)$$

$$N = \sum_{i}^{n} \sqrt{\frac{D_i v_i h}{2S}} \quad (5)$$

Obsérvese que tanto ICPT como N dependen de la relación S/H. Más aún, si se multiplican las dos ecuaciones miembro a miembro, se obtiene:

$$(ICPT)(N) = \frac{1}{2}\left[\sum_{i}^{n} \sqrt{D_i v_i}\right]^2 \quad (6)$$

Esta corresponde a la ecuación de una hipérbola. Obsérvese que la expresión del lado derecho se puede calcular fácilmente cuando se dispone de los datos correspondientes para todos los ítems agrupados. Además:

$$\frac{ICPT}{N} = \frac{S}{h} \quad (7)$$

Por lo tanto, se puede dibujar la hipérbola y para cada punto sobre ella calcular la relación de S/h, la cual puede utilizarse para estimar el valor de uno de los parámetros si se conoce el otro.

BIBLIOGRAFÍA

•Adam, Everett E., Jr. y Ronald J. Ebert, Administración de la producción y las operaciones: Conceptos, modelos y funcionamiento, 4ª Edición, Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1991.

•Axsäter, Sven, Inventory Control, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

•Ballou, Ronald H., Logística: Administración de la Cadena de Suministro, 5ª Edición, Prentice Hall, Pearson Educación, México, 2004.

•Banks, J. y J. S. Carson II, Discrete–Event Simulation, Prentice–Hall, Inc., Inglewood Cliffs, New Jersey, 1984.

•Chase, Richard B. y Nicholas J. Aquilano, Dirección y administración de la producción y de las operaciones, 6ª Edición, McGraw–Hill, México, 1995.

•Chase, Richard B., Nicholas J. Aquilano y F. Robert Jacobs, Administración de Producción y Operaciones: Manufacturas y Servicios, 8ª Edición, McGraw–Hill Interamericana, S.A., Santafé de Bogotá, 2000.

•Chopra, Sunil y Peter Meindl, Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation, segunda edición, Upper Saddle River, New Jersey, 2004.

•Ehrhardt, R., "The power approximation for computing (s, S) inventory policies", Management Science, Vol.25, No.8, pp. 777–786, 1979.

•Ehrhardt, R. y C. Mosier, "Revision of the power approximation for computing (s, S) policies", Management Science, Vol.30, No.5, pp. 618–622, 1984.

•Fogarty, Donald W., John H. Blackstone, Jr. y Thomas R. Hoffmann, Administración de la producción e inventarios, 2ª Edición Continental, S.A. de C.V., CECSA, México, 1994. (Primera reimpresión, México, 1995).

•Graves, S.C., G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan y P.H. Zipkin (Editores), Logistics of Production and Inventory, Handbooks in Operations Research and Management Science, Volumen 4, North–Holland, Amsterdam, 1993.

•Heizer, Jay y Barry Render, Dirección de Producción: Decisiones Tácticas, 4ª Edición, Prentice Hall, Madrid, 1997.

•Holt, C. C., Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages, Office of Naval Research, Memorandum No. 52, 1957.

•Karlin, S., "The application of renewal theory to the study of inventory policies", Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, K. Arrow, S. •Karlin y H. Scarf (Editores), Stanford, California, Stanford University Press, Capítulo 15, 1958.

•Krajewski, Lee J. y Larry P. Ritzman, Administración de operaciones: Estrategia y análisis, 5ª Edición, Pearson Educación de México S. A. (Prentice–Hall), México, 1999.

•Landeros, Robert y David M. Lyth, "Economic–Lot–Size Models for Cooperative Inter– Organizational Relationships," Journal of Business Logistics, Vol. 10, No. 2, 1989.

•Law, A. M. y W. D. Kelton, Simulation Modeling and Analysis, segunda edición, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

•Lee, H. L. y C. Billington, "Managing Supply Chain Inventory", Sloan Management Review, Spring, pp. 65–73, 1992.

•Lee, H. L., C. Billington y B. Carter, "Hewlett–Packard Gains Control of Inventory and Service through Design for Localization", Interfaces, Julio–Agosto, pp. 1–11, 1993.

•Montgomery, Douglas C., Lynwood A. Johnson y John S. Gardiner, Forecasting & Time Series Analysis, 2ª Edición, McGraw–Hill, Inc., New York, 1990.

•Naddor, E., "Optimal and heuristic decisions in single and multi-item inventory systems", Management Science, Vol. 21, No. 11, pp. 1234–1249, 1975.

•Nakane, J. y R. W. Hall, "Management Specs for Stockless Production," Harvard Business Review 61, No. 3 (1983).

•Narasimhan, Seetharama L., Dennis W. McLeavey y Peter J. Billington, Planeación de la producción y control de inventarios, 2ª Edición, Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1996.

•Noori, Hamid y Russell Radford, Administración de producción y operaciones: Calidad total y respuesta sensible rápida, McGraw–Hill, Santafé de Bogotá, 1997.

•Roberts, D., "Approximations to optimal policies in a dynamic inventory model." En Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford University Press, California, K. Arrow, S. Karlin y H. Scarf (Editores), pp. 207–229, 1962.

•Ross, Sheldon M., Introduction to Probability Models, 5a Edición, Academic Press, Inc., Boston, 1993.

•Roundy, R., "98%–Effective Integer–Ratio Lot–Sizing for One–Warehouse Multi–Retailer Systems", Management Science, Vol. 31, No. 11, pp. 1416–1430, 1985.

•Roundy, R., "98%–Effective Integer–Ratio Lot–Sizing for One–Warehouse Multi–Retailer Systems", Management Science, Vol. 31, No. 11, pp. 1416–1430, 1985.

•Roundy, R., "98%–Effective Lot–Sizing Rule for a Multi–Product Multi–Stage Production/Inventory System", Mathematics of Operations Research, Vol. 11, pp. 699–729, 1986.

•Schroeder, Roger G., Administración de Operaciones, 3ª Edición, McGraw–Hill, México, 1992. [Pronósticos (pág. 52–91); Administración de los inventarios (pág. 451–554)

•Schwarz, L. B., "A simple continuous review deterministic one–warehouse N–retailer inventory problem", Management Science, Vol. 19, No. 5, pp. 555–566, 1973.

•Silver, Edward A. y H. C. Meal, "A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities for the case of a Deterministic Time–Varying Demand Rate and Discrete Opportunities for Replenishment," Production and Inventory Management Journal, 2nd quarter, 1973, 64–74.

•Silver, Edward A. y Rein Peterson, Decision Systems for Inventory Management and Production Planning, 2ª Edición, John Wiley & Sons, New York, 1985.

•Silver, Edward A., David F. Pyke y Rein Peterson, Inventory Management and Production Planning and Scheduling, 3ª Edición, John Wiley & Sons, New York, 1998.

•Sipper, Daniel y Robert L. Bulfin, Jr., *Planeación y control de la producción,* McGraw– Hill, México, 1998.

Sistemas de producción tipo kanban: Descripción, componentes, diseño del sistema, y bibliografía relacionada.

OSCAR JAVIER PARRA ORTEGA
POLITÉCNICO GRANCOLOMBIANO
oparraor@poligran.edu.co

OSCAR JAVIER PARRA ORTEGA.

Ingeniero Industrial de la Universidad Industrial de Santander. Aspirante al título de maestría en Ingeniería Industrial de la Universidad de los Andes. Docente del Departamento de Ingeniería Industrial, Politécnico Grancolombiano.

RESUMEN:

El presente artículo tiene como objeto de estudio, los sistemas de producción tipo ensamble (tree structure) tipo Kanban, mono-producto, con tiempos de procesamiento aleatorios para las estaciones que lo conforman, y con capacidad limitada de producción para cada estación. Adicionalmente, se restringe el análisis de dichos sistemas, para horizontes finitos de producción. Después de una descripción del mecanismo de operación de un sistema Kanban simple, de los elementos que los componen, y del estado del arte en sistemas de producción tipo Kanban, se propone e implementa un modelo heurístico para determinar el número de kanbans, minimizando el costo promedio del inventario en proceso.

ABSTRACT:

The present article has as study object, the Kanban type assembly production systems (tree structure), mono-product, with random times of processing for the stations that conform it, and with limited capacity of production for each station. Additionally, the analysis of these systems is restricted, for finite horizons of production. After describing the mechanism of operation of a single card Kanban system, as well as their components, and review studies related to Kanban production systems, it proposes and implements a heuristic model to determine the number of kanbans, minimizing the average cost of the inventory in the process.

PALABRAS CLAVE:

Sistemas Kanban; heurísticas; simulación; líneas de ensamblaje

KEYWORDS:

Kanban Systems; heuristics; simulation; assembly lines

I. INTRODUCCIÓN

Kanban es un componente esencial de la filosofía de gestión de operaciones JIT (just in time), la cual tiene como orientación básica, la reducción del nivel de inventarios, mediante procesos que satisfagan la demanda en la cantidad, y en el tiempo requeridos. Para implementar esta filosofía, propone la aplicación de un sistema de control de producción tipo Pull, en el cual los ítems son producidos al ritmo que se necesitan, y donde la última estación es la que marca dicho ritmo, haciendo reposición de las unidades consumidas. De esta forma, una estación produce únicamente como respuesta a una orden de reposición inmediatamente posterior de ítems consumidos por su estación. El sistema tipo Pull más conocido es el tipo kanban, en el cuál las ordenes de reposición de ítems consumidos se transmiten a través de señales conocidas como kanbans.

En su traducción literal, la palabra japonesa kanban significa “señal” o “tarjeta”. En el contexto de producción, se refiere específicamente a un sistema de señales visuales de control de producción que autoriza o dispara (trigger) el proceso de reabastecimiento. Esta señal de reabastecimiento puede tomar una amplia variedad de formas, desde tarjetas o tableros, hasta señales electrónicas (e-kanban). La decisión respecto a la forma que esta señal va a tomar dependerá de diversos factores, tales como la distancia que tiene que recorrer la señal, y el contenido que debe transmitir. A continuación se describirá el funcionamiento de este mecanismo, en su acepción clásica, los componentes del sistema en su fase de diseño, y finalmente se hará mención de la bibliografía disponible hasta la fecha sobre el tema para un estudio más profundo.

1.1. Descripción del sistema tipo kanban

Inicialmente, se hará precisión sobre los elementos que delimitan, o que caracterizan los sistemas de producción tipo kanban.

Una instalación de manufactura está conformada por una serie de estaciones de trabajo conectadas entre sí por relaciones de precedencia en la realización de operaciones, y por el flujo de ítems e información asociada con la realización de dichas operaciones. Cada una de estas estaciones de trabajo tiene la siguiente configuración: un número de servidores (los cuales pueden ser máquinas, operarios, o una combinación de estos) que trabajan en paralelo dentro de la estación, y que realizan una secuencia de actividades sobre los elementos que se van a procesar. Cada estación está caracterizada por:

- La distribución de su tiempo de procesamiento.
- El tamaño de lote que procesa.
- Un conjunto de estaciones predecesoras que le suministran ítems para procesar.
- Un mecanismo de activación del proceso de producción dentro de la estación, y otro mecanismo de activación para el transporte de ítems terminados a las estaciones posteriores.

Cada una de las estaciones así descritas, maneja en un instante determinado, dos tipos de ítems: terminados, y en proceso, clasificados a su vez como componentes, materias primas, ensambles o subensambles. Una vez han sido procesados, los ítems terminados se agrupan en lotes de un tamaño determinado (tamaño de lote de transferencia) y son transportados a las estaciones posteriores en la instalación de manufactura para continuar con la secuencia de procesamiento. El tamaño del lote de transferencia dependerá tanto de las características de la estación que envía los ítems, como de la que los recibe.

A su vez, las estaciones se pueden describir bajo las siguientes relaciones de precedencia:

- Toda estación que recibe ítems terminados tipo i, se considera posterior inmediata a i.
- Toda estación que envíe ítems terminados a la estación i, se considera predecesora inmediata de i.

Con base en las definiciones anteriores, a continuación se muestra el tipo de configuración conocido como kanban simple.

1.1.1. Kanban simple (SK)

Esta configuración utiliza un tipo de tarjetas conocidas como kanban de transferencia (kanban de retiro). Cada kanban de transferencia se utiliza para comunicar la necesidad de transferir un contenedor lleno de materia prima, desde una estación predecesora (upstream) i, hacia la siguiente estación (downstream) i+1. Todas las estaciones están provistas de un buffer de kanbans entrantes y otro buffer de kanbans salientes, así como un punto de almacenamiento de material entrante, y un punto de almacenamiento de material saliente.

Al inicio de cada periodo de reabastecimiento, las tarjetas

almacenadas en el buffer de kanbans salientes de la estación i+1, se llevan al buffer entrante de la estación i. Estos kanbans van a actuar en la estación i como señales de activación del proceso de reabastecimiento, y se ubican en el mismo orden en el que venían de la estación i+1.
A su vez, al inicio de cada ciclo de reabastecimiento y retiro (withdrawal cycle), los contenedorcontenedores con material procesado en la estación i, son transferidos al punto de almacenamiento de material entrante de la estación i+1 (se efectúa el proceso de reabastecer a la estación i+1). Nótese que cada uno de estos contenedorcontenedores tiene adjunto un kanban.
El proceso de producción en la estación i da inicio únicamente cuando tenga un kanban en el buffer entrante i, y cuando haya material disponible en el punto de almacenamiento de material entrante de dicha estación. Cuando se cumplan estas dos condiciones, el proceso de producción iniciará, y el kanban que tiene adjunto el contenedor de materia prima que se empieza a utilizar es retirado y ubicado en el buffer saliente.
Finalmente, cuando un contenedor en i se ha completado, se le adjunta el kanban que generó su producción (el que estaba ubicado en el buffer entrante i). El container completo se ubica en el punto de almacenamiento de material saliente, para ser transferido a la estación i+1, al inicio del siguiente ciclo de reabastecimiento.

II. Componentes del diseño de un sistema kanban

El sistema de reabastecimiento kanban puede considerarse como uno de los más sencillos de entender en su filosofía, pero uno de los más difíciles de aplicar de forma exitosa. Su efectividad depende principalmente de dos factores: que sea diseñado para cumplir con las necesidades específicas del entorno bajo el cual va a operar, y que sea implementado de forma apropiada. Es un error común intentar replicar de forma exacta las técnicas propuestas por un autor determinado o las prácticas exitosas vistas en otras plantas de producción, sin seleccionar debidamente la técnica o técnicas kanban que mejor se adapten a los factores específicos del entorno de producción. Entre otros factores para tener en cuenta, se pueden enumerar los siguientes:

•Expectativas del cliente final frente a la capacidad de respuesta.
•Comportamiento de la demanda.
•Cantidad de partes activas en el sistema.
•Ubicación y capacidad de respuesta de los proveedores
Un sistema kanban diseñado a la medida del entorno de producción genera las cantidades de producción en los momentos en que se requieren, y está acompañado por una visible reducción de inventario, faltantes, actividades que no generan valor agregado, y de los costos globales de fabricación. Si funciona debidamente, este sistema requerirá un menor nivel de intervención y esfuerzo para su funcionamiento, e incrementará el porcentaje de órdenes entregadas a tiempo.
En cambio, si el diseño no es el apropiado, la brecha subyacente entre el sistema de abastecimiento y los requerimientos del entorno de producción va a manifestarse en un mayor nivel de inventario, un sobredimensionamiento del tamaño de lote kanban, y en la aparición de listas con prioridad de entrega (para responder a las órdenes retrasadas que suelen aparecer).
Mecanismo de gestión de la demanda final. Este componente es vital para reducir el impacto de los patrones de demanda no lineales que puedan afectar la eficiencia del sistema kanban. Incluyen, pero no se limitan, a técnicas de pronóstico y de ajuste de la demanda con la capacidad existente del sistema.

Tipo de contenedor que se va utilizar. Vienen determinados de acuerdo con el tamaño y peso de los componentes, el volumen de la demanda, y la distancia entre estaciones.

Dimensionamiento de lote kanban. Debe establecerse teniendo en cuenta el comportamiento de la demanda, la disponibilidad y condiciones de suministro de los proveedores, así como los tiempos de preparación para cada estación.

Mecanismos de activación. Son aquellas reglas de decisión que dan pie al proceso de producción y reabastecimiento de inventario entre estaciones. Su elección y configuración depende de la cantidad de partes, del tamaño de la planta, y de la integración con sistemas MRP (cuando coexisten con el sistema k.

Mecanismos de intervención. Como respuesta a las variaciones en la demanda, estos mecanismos se encargan de ajustar el número de tarjetas (kanbans) que circulan en el sistema.

Manejo de materiales. De acuerdo con estos mecanismos, se pueden reducir sustancialmente los costos indirectos asociados con la inspección y movimiento de materiales entre estaciones.

Interacción con proveedores. Con el fin de integrar la cadena de abastecimiento al sistema de producción, deben tenerse en cuenta como restricciones del sistema, los tiempos de reabastecimiento (lead time) de los proveedores, y el tipo de ítems requeridos como suministro para iniciar el proceso de producción.

2.1.Mecanismos de gestión de la demanda final.

Un requisito esencial para alcanzar la eficiencia en un sistema kanban de manufactura, es lograr que el comportamiento de la demanda de productos terminados tienda a ser lineal. Si por el contrario, el comportamiento de la demanda es errático, el sistema de producción tiende a verse afectado de forma negativa a causa de las variaciones súbitas en el nivel de producción. Problemas de calidad, mayor dificultad para mantener la confiabilidad de la maquinaría de producción, incremento de inventario, y de los costos de producción, pueden ser provocados por la ausencia de mecanismos apropiados para gestionar el comportamiento de la demanda.

Por lo anterior, en la primera fase del diseño de un sistema de producción kanban es primordial seleccionar, tanto los mecanismos de programación de la producción final, como los mecanismos de actualización de los pronósticos de la demanda.
Entre los mecanismos de programación de la producción sugeridos por Raymond [39] para los sistemas kanban, se tienen los siguientes:

•Un plan maestro de producción (Master Production Schedule), que indique las cantidades del producto final que se va a fabricar o ensamblar en cada periodo de tiempo, con base en las órdenes actuales y en las pronosticadas. Se recomienda aplicar un MPS de suavizamiento de carga (load-smoothing) el cuál desarrolla una programación diaria de producción a partir de una relación lineal entre el pronóstico para el periodo de producción y el número de días hábiles del periodo. Para el caso de líneas de fabricación multiproducto, además se debe determinar la secuenciación de productos de forma que se asegure, en el curso del día, un patrón de demanda cíclica lineal entre las distintas referencias a producir.

Esta alternativa se sugiere en los casos en los cuales la demanda no tiene un comportamiento lineal, y cuando la capacidad de respuesta del sistema supera los requerimientos de demanda de los clientes finales.

•Activación de la producción en la última estación de la línea de ensamble, a partir de la llegada de nuevas órdenes
•Para líneas de ensamble multiproducto donde se combinan productos de demanda estable (y alto volumen) junto a otros con demanda errática y bajo volumen de ventas, se utiliza de forma conjunta el sistema kanban para los productos de alto volumen, y la activación por órdenes de producción para los ítems de demanda errática y bajo volumen. La prioridad para el ingreso a la celda de producción de los ítems de baja demanda, se asigna de acuerdo con las expectativas de entrega acordadas por el cliente.

•Para mezclas de productos con componente estacional en el comportamiento de su demanda, se recomienda establecer un MPS para la planeación de la producción, junto con la activación por órdenes de producción exclusivamente para productos de bajo volumen.

•Para productos altamente personalizados, la opción más apropiada es la de iniciar la producción con base en las especificaciones de cada orden, pero generar un MPS para la planeación de capacidades en los modelos básicos (genéricos) de la línea.

•Finalmente, para sistemas de producción tipo taller (job shop) con comportamiento no lineal en la demanda, se recomienda aplicar kanban exclusivamente en los niveles inferiores de producción (materias primas y algunos subensambles y ensambles) en los cuáles exista alta similitud.
Ahora, el segundo aspecto de importancia en el diseño de los mecanismos de gestión de la demanda final, es el relacionado con los pronósticos y con la forma como estos

alimentan al MPS para la planeación de la capacidad. Se recomienda utilizar uno de los siguientes mecanismos

•Generar pronósticos que reflejen directamente las cantidades de cada ítem por periodo de planeación. Es eficiente si se maneja un número reducido de productos finales.

•Generar pronósticos en unidades monetarias, y automatizar el proceso de conversión de dichos pronósticos en términos de cada referencia y periodo de tiempo. Es recomendable para sistemas que manejan un alto número de referencias de producto terminado.

2.2. Tipo de contenedor que se va a utilizar

De acuerdo con el tipo de ambiente de producción, y con las características asociadas a cada producto (volumen de demanda y costos asociados), se debe seleccionar apropiadamente el tipo de contenedor Kankan que se va a utilizar. Existen cinco tipos de contenedor diferenciados-contenedor:

•**Container sencillo de cantidad unitaria (discreto)**. Se utiliza para mover ítems que por sus grandes dimensiones y alto costo no permiten el manejo de contenedorcontenedores de capacidad múltiple. En lugar de utilizar un contenedor físico, el sistema kanban maneja un espacio demarcado para la utilización (procesamiento) del ítem.

La activación de reaprovisionamiento (triggering) se genera con base en el inventario de piezas disponibles más las solicitadas (on-order + on-hand). De todas las alternativas, esta es la que tiende a manejar el menor nivel de inventario promedio, a causa del alto costo de los ítems. El inconveniente que presenta este tipo de contenedor es que por manejar un menor inventario promedio, la estación a la cual alimenta (estación posterior) es más sensible al tamaño de lote seleccionado y pueden presentarse faltantes. Por eso es recomendable aplicar este tipo de contenedor a subensambles o ensambles terminados, o productos finales, más que a partes que alimentan a otras estaciones. Nótese que el tamaño del contenedor para este caso es 1, y que el número de contenedorcontenedores equivale al tamaño de lote kanban.

Container sencillo de capacidad total. Se utiliza para mover y reaprovisionar ítems de bajo costo, en los cuales el costo de transporte del contenedor es relevante frente al costo de los componentes que alberga, y por esta razón, no hay desplazamiento físico de contenedorcontenedores entre estaciones. Los componentes son de pequeño tamaño y el tiempo de preparación es relevante para calcular las cantidades de reaprovisionamiento (tamaño de pedido medido como en términos del número de contenedorcontenedores por solicitar para reaprovisionar a la estación a la que sirve).

El mecanismo de activación en este caso es el siguiente: si el número de piezas disponibles más piezas solicitadas (inventory on-hand + inventory on-order) es inferior al tamaño de lote kanban, se solicita un número de piezas equivalente al tamaño de lote kanban. Por ejemplo, si el tamaño de lote kanban es de 80 unidades y hay disponibles 79, se hace una orden de reaprovisionamiento por 80 piezas. Es claro que este mecanismo requiere que el conteo de inventario disponible, así como el lanzamiento de órdenes de reaprovisionamiento sea automatizado.

•**Contenedores duales.** Este se utiliza también para productos pequeños, pero con la salvedad de que el tamaño de lote kanban puede fluctuar entre periodos de planeación. Funciona de la siguiente forma: hay dos contenedor idénticos uno detrás de otro en una estación de procesamiento. Solo cuando el container frontal está vacío, el container posterior avanza y el vacío se envía a la estación precedente (o al proveedor para su reaprovisionamiento). Una vez se ha hecho el reaprovisionamiento del container, este se retorna a su estación de uso.

Tal como sucede con los contenedor sencillos de capacidad total, y con los contenedor triples, se maneja un tamaño de lote kanban para la activación del reaprovisionamiento, dado que el tiempo de preparación en la estación precedente es relevante.

•**Contenedores triples.** Se utiliza únicamente para reaprovisionamiento externo, cuando el proveedor está ubicado a una distancia considerable del sistema de producción. La activación se genera por tamaño de lote kanban, y el sistema funciona de la siguiente forma: hay dos contenedores idénticos en el punto de uso (estación), y un tercer contenedor vacío está en la ubicación del proveedor del material para dicha estación. En cuanto se vacía el contenedor frontal, este inicia la activación de la orden hasta que se alcance el tamaño de lote kanban. La señal de activación se hace de forma electrónica o (EDI, Extranet o

FTP, entre otros) de forma que el kanban de producción (el tercer P-kanban vacío que está en la ubicación del proveedor) se activa sin que haya demora de transporte del primer contenedor vacío desde la estación hacia el fabricante de material.

•**Múltiple manejo de tarjetas en el sistema de contenedor.** Esta configuración utiliza dos o tres tipos de tarjetas, que prestan diferentes funciones para la activación de procedimientos en sistemas con múltiples contenedores. A continuación se describen ambas variantes:

-**Enfoque clásico de tres tarjetas.** Se maneja una tarjeta de producción (P-kanban), una tarjeta de retiro de material (T-kanban), y una tarjeta para proveedores (S-kanban). Las tarjetas de producción generan en las estaciones precedentes el proceso de producción y reabastecimiento de un nuevo contenedor. Una vez el container está lleno, hasta que no haya una T-kanban (withdrawal kanban) no se efectúa su transporte hasta el punto de uso. Las tarjetas para activación de reabastecimiento por parte del proveedor o S-kanban indican adicionalmente el ciclo de entrega (número de entregas/frecuencia de entrega/número de periodos durante los cuales está activo el reabastecimiento).

-**Enfoque de dos tarjetas.** Para el manejo interno en la planta, cada parte o pieza tiene asignados dos tipos de tarjeta: P-kanban y T-kanban.

Cualquiera de los mecanismos mencionados anteriormente tiene como objetivo básico el control de forma separada, del número de tarjetas tipo P y tipo T que circulan por el sistema. El anterior modelo sigue la recomendación de Ardalan de que las partes requeridas por una T-kanban deben ser producidas primero que las requeridas por las tarjetas de producción (una T-kanban representa una orden más urgente que la activada por una P-kanban).

2.3. Implementación de los mecanismos de activación (triggering)

De acuerdo con el número de referencias y partes por manejar, su tamaño y peso, y al tipo de configuración de producción, se tienen las siguientes alternativas para la implementación de los mecanismos de activación:
•**Activación manual, o activación por tarjetas.** Aplicable para sistemas con una cantidad limitada de partes, un tamaño relativamente pequeño de planta, y proveedores locales. No se recomiendan para contenedores sencillos (discretos y de capacidad total) a causa de los cálculos y controles que estos requieren para la activación de una orden

•**Activación automatizada.** Elimina actividades asociadas con el proceso manual de activación, ya que estas no agregan valor al producto final. Es ideal para sistemas complejos o con gran número de referencias y se acompasa con relativa facilidad a entornos que operan bajo una mezcla de ítems producidos bajo kanban y MRP.

•**Metodología de emisión.** Para ítems de alto costo y/o tamaño, se recomienda que el inventario disponible que mantiene cada estación sea consumido durante el periodo de producción. La orden se emite de forma que el reabastecimiento sucede en el punto de uso en el instante preciso en el cuál se requiere su ensamble (y no antes como puede pasar con las otras metodologías, en las cuales sí hay una cantidad predeterminada de inventario disponible).

•**Activación por tableros o por cartas kanban.** Simplifica la aplicación cuando el tamaño o peso del artículo favorece el uso de tableros en lugar de otros instrumentos que se fijan directamente al producto.

•**Activación por kanbans visuales.** Es conveniente cuando hay proximidad entre las estaciones (proveedora y usuaria de los ítems). El mecanismo de transporte también puede hacer las veces de kanban visual (banda transportadora, por ejemplo).

2.4. Dimensionamiento del lote kanban

Finalmente, el tamaño del lote kanban está asociado de forma directamente proporcional, con la demanda esperada en el periodo de producción (diaria, por hora, o por turno de producción), así como con el tiempo de reaprovisionamiento de la estación precedente (más el inventario de seguridad, expresado en unidades de tiempo como una fracción del periodo de producción).
Por ejemplo, si la producción planeada para el periodo de producción (día) es de 160 unidades, el sistema opera durante 8 horas diarias, y el lead time de la estación que alimenta a un contenedor es de una hora, se requiere que

el tamaño del lote, por lo menos, sea de 20 unidades, más las unidades que se estimen de acuerdo con el inventario de seguridad asociado con la estación precedente.
Ahora, dividiendo el tamaño de lote kanban entre la capacidad estándar del contenedor (standard container quantity) se calcula la cantidad de pedido kanban, la cual se expresa en términos del número de contenedores. De modo que, para estaciones que operan con un solo contenedor discreto, el tamaño de lote equivale al número de contenedores unitarios que puede albergar (el movimiento entre estaciones tiene una cantidad de pedido igual a uno). En cambio, la cantidad de pedido kanban en los mecanismos de contenedores restantes (contenedor sencillo de capacidad total, doble, triple o múltiple), está ligado al tamaño estándar de cada contenedor.

III.Estudios publicados sobre el análisis y descripción de los sistemas kanban

Dado que existe una amplia bibliografía relacionada con los sistemas de producción tipo Pull, entre ellos los sistemas tipo kanban (con sus diversas variantes), es importante resaltar que los artículos de investigación disponibles a la fecha, se pueden clasificar dentro de cuatro categorías bien diferenciadas. La primera de ellas corresponde a aquellos estudios en los cuáles se parte del supuesto básico que los tiempos de procesamiento y de llegadas de materia prima al sistema, son conocidos y con varianza cero. Estos modelos, de tipo determínistico, conforman la mayor parte de la bibliografía disponible en cuanto a modelos de sistemas de producción acordes con la filosofía JIT.
Un segundo grupo corresponde a aquellos estudios que han incluido el modelaje de los tiempos de llegadas y/o servicios al sistema, a partir de distribuciones de probabilidad de diversa complejidad. En esta categoría se trabaja el problema inicialmente con distribuciones tipo exponencial o Erlang, y en algunos casos a partir de cadenas markovianas simples. En la bibliografía revisada hasta el momento ningún autor cita las distribuciones tipo fase para el modelaje del sistema, a pesar de que estas distribuciones presentan ventajas desde el punto de vista geométrico matricial para los cálculos de las medidas de desempeño, y que pueden representar virtualmente cualquier tipo de distribución asociada con el comportamiento real del tiempo de proceso de una máquina en un sistema tipo ensamble. Este grupo incluye lo que se conoce como modelos estocásticos o probabilísticos.
En una tercera categoría, aparecen con mayor frecuencia en los años más recientes, diversos artículos que proponen modelos de simulación para comparar el desempeño de los sistemas tipo ensamble bajo distintas condiciones de operación. A diferencia de los modelos anteriores, en estos estudios no se optimiza el desempeño, ya que no se propone una formulación matemática cerrada para el sistema.
Finalmente, un pequeño porcentaje de los artículos encontrados se enfocan o bien en describir las generalidades y los aspectos cualitativos de los sistemas de producción tipo kanban, o en realizar una revisión de artículos orientados a aspectos específicos, como la implantación del sistema JIT y kanban en las empresas en Occidente. A continuación se resaltan los aspectos más relevantes de los artículos disponibles en la bibliografía, en orden cronológico:

Ohno(1977) hace una descripción cualitativa del sistema kanban introducido por él mismo en Toyota, y describe las características distintivas de este sistema frente a los propuestos para sistemas tipo Push: la producción JIT, orientada a fabricar los productos indicados en las cantidades precisas y los periodos necesarios de tiempo; y el respeto por el ser humano, bajo el cual todos los operarios puedan desarrollar al máximo sus capacidades a través de la participación activa en el mejoramiento de las operaciones.
Burns (1978) investiga el proceso de respuesta dinámico de una cadena de suministro multietapa, con reglas de decisión individuales para cada etapa, frente a un modelo que ajuste problemas de “falsas órdenes” generados con las reglas de decisión individuales. Ambas propuestas son evaluadas con un modelo de simulación.
Tabe y otros (1980) modela la variabilidad en las cantidades por movilizar entre etapas en un sistema tipo kanban multietapa, basándose en pronósticos frente a las fluctuaciones de la demanda, de forma que se reduzcan las variaciones del nivel de inventario en cada etapa.
Schonberger (1983) presenta las aplicaciones de las técnicas de kanban de tarjeta sencilla y tarjeta dual, y compara dichos sistemas frente a los tradicionales MRP, punto de reorden y otras técnicas de reabastecimiento continuo. Se hace énfasis en el modelo kanban dual.
Huang (1983) resalta la importancia del ambiente bajo el

cual se va a implantar un sistema kanban y realiza una simulación para un sistema multilínea y multietapa para determinar su capacidad de adaptación a los ambientes de producción occidentales. Se modelan los problemas de balance entre las distintas etapas de producción.

Davis (1985) desarrolla un estudio sobre las dificultades que se presentan al momento de proponer un modelo de optimización discreto, que no captura con facilidad el comportamiento estocástico de diversos elementos de un sistema tipo kanban. Se desarrolla una estrategia de control para un fabricante de puertas bajo pedido, combinando simulación y optimización discreta.

Bitran y Chang (1987) proveen una formulación entera no lineal para un sistema de producción de ensamble tipo árbol, multietapa, de un solo ítem, de tipo determínistico. Esta formulación asume un tiempo cero de transporte y períodos finitos de planeación, para calcular el mínimo número factible de kanbans. El modelo inicial se transforma en un modelo de tipo lineal, en el cual no hay ningún tipo de incertidumbre en los parámetros modelados.

PhiIipoom (1987) hace un análisis comparativo de las características presentes en las compañías japonesas que han implantado los sistemas de producción tipo kanban, y resalta que dichas características no están presentes en casi ninguna firma occidental. Concluye que, sin un ambiente apropiado de producción, la implantación de JIT es poco probable que alcance los objetivos propuestos. Resalta los factores que influyen en el número de kanbans requeridos por estación en un entorno de producción occidental: el Throughput; los coeficientes de variación de los tiempos de procesamiento y la utilización de las máquinas. El impacto de estos factores se analiza a través de un modelo de simulación.

Krajewski y otros (1989) delimitan diversos factores esenciales para alcanzar la efectividad con sistemas tipo kanban en empresas japonesas. Los diversos niveles asignados a cada planta bajo estudio fueron incluidos para realizar los ajustes de configuración en un modelo de simulación de los sistemas de producción. A partir de una variación en dichos ajustes de configuración, se demuestra que mientras kanban mejora el desempeño en muchas plantas, existe un grupo de plantas con un comportamiento similar al de las fábricas en los EUA, para los cuáles la simulación arroja pésimos resultados en términos de desempeño. Se concluye después de variar los niveles de inventario y de confiabilidad de las máquinas, que estos factores no tiene un impacto tan elevado como el ambiente de manufactura seleccionado, en el desempeño del sistema.

Sarker (1988) trata más a fondo el efecto del desbalance entre los tiempos de operación de las etapas que conforman un sistema de producción JIT, a través de un modelo de simulación.

Gravel y otros (1988) muestran que el método kanban puede adaptarse para su aplicación en sistemas tipo jobshop. Dicha adaptación se implementa y aprueba de forma intensiva por medio de simulación.

Villena (1988) examina un sistema de ensamble tipo árbol en el cuál diversas líneas de subensamble alimentan una estación final. En la asignación de la carga de trabajo en las estaciones, se propone reducir los efectos generados por la variabilidad en los tiempos de operación. Se propone uno de los diversos métodos de desbalance para reducir la variabilidad e incrementar el Througput del sistema, y se compara dicha productividad frente a la obtenida por sistemas perfectamente balanceados. Se analiza también el efecto del tamaño permitido para el buffer entre estaciones respecto a la mejora en la productividad.

Funk (1988) discute algunos problemas asociados con el modelaje de manufactura JIT, y describe algunos modelos sencillos de costos de inventario para evaluar estrategias de reducción de costos en un sistema de ensamblaje (PCB).

Gupta(1989) utiliza un modelo de simulación dinámico para investigar las características únicas de los sistemas kanban, bajo la presencia de factores exógenos al sistema.

En Uszoy (1990), se realiza una revisión de los modelos tipo Kanban basados en sistemas de un solo ítem, y se proponen futuras direcciones para la investigación de sistemas multi ítem, procedimientos de solución heurística, análisis por escenarios y otros ambientes menos convencionales.

Hopp & Spearman(1990) describen un sistema de producción novedoso para su época: el sistema tipo CONWIP. Se muestran las ventajas de este sistema frente a otros sistemas tipo Push y tipo Pull de forma teórica y a través de simulación.

Onvural(1990) realiza una revisión minuciosa de los distintos tipos de redes cerradas con bloqueos, entre los cuales se encuentran los sistemas tipo Kanban. La revisión está asociada a redes cerradas con colas finitas.

Graham(1992) desarrolla un modelo Markoviano de estado estable para calcular el número de kanbans en la etapa de control de los procesos que alimentan a las lineas de ensamblaje, el cuál, combinado con una política de control del número de kanbans, reduce el inventario y mejora el desempeño frente a los sistemas Kanban tradicionales.

Berkley(1993) establece un método para calcular los mínimos niveles de desempeño requeridos para garantizar una tasa deseada de producción. Con base en esos niveles de desempeño, se resuelve el problema de calcular el número de kanbans en cada estación.

Chang (1994) plantea una function objetivo multi-atributo que de forma simultánea busque minimizar el tiempo de ciclo, el costo de operación y las pérdidas de capital, al optimizar el número de kanbans y de tamaños de lote. Se propone un algoritmo de recocido simulado frente al algoritmo multi-atributo, y se aplica un heurístico para mejorar el desempeño del algoritmo propuesto. Igualmente plantea en otro estudio del mismo año un modelo de simulación en el que obtiene que el sistema Kanban genérico supera en desempeño a los sistemas CONWIP.

Chao(1995) propone un método de prioridad-K para lineas de producción no seriales con diferentes prioridades para sus productos. Utilizando un proceso de decisión markoviano y conceptos de programación dinámica, se desarrolla y se resuelve un modelo para sistemas Kanban con prioridades, el cuál mejora el desempeño frente a reglas de colas tipo FCFS.

Price(1995)et.al. resalta la importancia de la selección del número de kanbans a utilizar, así como el tamaño del lote-kanban, y propone un modelo de optimización para determinar el número óptimo de kanbans en un taller de ensamble y se comprueba que existe una relación entre el makespan de una orden y el número de kanbans para el taller de ensamble.

Huang(1996) actualiza la revisión de los estudios disponibles para el cálculo del número de kanbans, bajo los enfoques determínistico, probabilístico y de simulación.

Hemamalini(2000) et.al. plantean un algoritmo heurístico para calcular los tamaños de contenedor, su cantidad, y la programación de los mismos para controlar el material entre estaciones y el nivel de operación en cada estación. El algoritmo calcula el tamaño de los contenedor para minimizar las tardanzas ponderadas de los contenedor y de las ordenes de producción. Se generaron problemas aleatorios de diversos tamaños para evaluar el desempeño del heurístico.

Suri(2003) establece un sistema híbrido push-pull para el control de producción que combina los aspectos de los sistemas kanban con los tradicionales MRP. Se muestran las mejoras obtenidas con este nuevo sistema frente al throughput, la reducción del WIP y los tiempos de aprovisionamiento, así como el incremento en el porcentaje de entregas dentro de los plazos establecidos.

Finalmente, Matta(2005) desarrolla una metodología para evaluar el desempeño de sistemas kanbans multietapa que funcionan con diferentes políticas de control. Se utilizan para ello diversas técnicas de redes de colas, aplicadas a sistemas de ensamble independiente versus sistemas de ensamble simultáneo. Matta propone una política de control apropiada en la fase de diseño del sistema, en la cual los resultados se validan a través de simulación.

BIBLIOGRAFIA

•Akturk, M. S.Erhun, F. An overview of design and operational issues of Kanban systems. International Journal of Production Research, 1999.

•Ashburn, A. Toyota's famous ohno system. American Machinist, 1986.

•Askin, R. G.Mitwasi, M. G.Goldberg, J. B. Determining the number of kanbans in multi-item just-in-time systems. IIE Transactions, 1993.

•Bard, J. F.Golony, B. Determining the number of kanbans in a multiproduct, multistage production system. International Journal of Production Research, 1991.

•Berkley, Blair J. A simulation study of container size in two-card Kanban system. International Journal of Production Research, 1996.

•Berkley, Blair J.Kiran,A. S. A simulation study of sequencing rules in a Kanban controlled flow shop. Decision Sciences, 1991.

•Berkley, Blair J. Simulation tests of FCFS and SPT sequencing in Kanban systems. Decision Sciences, 1993.

•Berkley, Blair J. A review of the Kanban production control research literature. Production and Operations Management, 1992.

•Berkley, Blair J. Setting minimum performance levels for two-card kanban-controlled lines. International Journal of Production Research, 1993.

•Berkley, Blair J. Effect of buffer capacity and sequencing rules on single-card Kanban system performance. International Journal of Production Research, 1993.

•Berkley, Blair J. Testing minimum performance levels for kanban-controlled lines. International Journal of Production Research, 1900.

•Bitran, Gabriel R.Chang, Li. A mathematical programming approach to a deterministic Kanban system. Management Science, 1987.

•Burns, J. F.Sivazlian, B. D. Dynamic analysis of multi-echelon supply systems. Computers & Industrial Engineering, 1978.

•Buzacott, J. Queueing Models of Kanban and MRP controlled production systems. Engineering Costs and Production Economics, 1989.

•Chang, T.M.Yih, Y. Generic Kanban systems for dynamic environments. International Journal of Production Research, 1994.

•Chang, T.M.Yih, Y. Determining the number of kanbans and lotsizes in a generic Kanban system: a simulated annealing approach. International Journal of Production Research, 1994.

•Chao, X.Das, S.K.Nagendra, P. Prioritization of kanbans in the case of a single station serving multiple downstream stations. International Journal of Production Research, 1995.

•Chaudhury, AbhljitWhinston, Andrew B. Towards an adaptive Kanban system. International Journal of Production Research, 1990.

•Cimorelli, Stephen. Kanban for the supply chain. Fundamental practices for manufacturing management. Productivity Press, NY., 2006.

•Davis, Wayne J.Stubitz, Steven J. Configuring a Kanban system using a discrete optimization of multiple stochastic responses. International Journal of Production Research, 1987.

•Deleersnyder, Jean-Luc.Hodgson, T. J.et.al. Kanban controlled pull systems: an analytic approach. Management Science, 1989.

•Funk, Jeffrey L. A comparison of inventory cost reduction strategies in a JIT manufacturing system. International Journal of Production Research, 1989.

•Graham, I. Tandem queues and kanban-controlled lines. International Journal of Production Research, 1991.

•Graham, I. Comparing trigger Kanban control of flowline manufacture. International Journal of Production Research, 1992

•Gravel, Marc.Price, Wilson L. Using the Kanban in a job shop environment. International Journal of Production Research, 1988.

•Gupta, Yash P.Gupta, Mahesh C. A system dynamics model for a multi-stage multi-line dual-card JIT-Kanban system. International Journal of Production Research, 1989.

•Hemamalini, B. Determination of the number of contenedor, production kanbans and withdrawal kanbans; and scheduling in Kanban flowshops. Part I & II. International Journal of Production Research, 2000.

•Huang, C. C.Kusiak, A. Overview of Kanban systems. International Journal of Computer Integrated Manufacturing, 1996.

•Huang, P.Y.Rees, Loren P.et.al. A simulation analysis of the japanese just-in-time technique (with Kanbans) for a multiline, multistage production system. Decision Sciences, 1983.

•Karmarkar, U.S. Kanban systems. The Graduate School of Management, U. of Rochester, 1986.

•Karmarkar, U.S.Kekre, S. Batching policy in Kanban systems. Journal of Manufacturing Systems, 1987.
•Kim, Tae-Moon. Just-in-time manufacturing system: a periodic pull system. International Journal of Production Research, 1985.
•Kimura, Osamu.Terada, Hirosuke. Design and analysis of Pull System, a method of multi-stage production control. International Journal of Production Research, 1981.
•Krajewski, Lee J.King, Barry E.et.al. Kanban, MRP, and shaping the manufacturing environment. Management Science, 1987.
•Lee, L.C. Parametric appraisal of the JIT system. International Journal of Production Research, 1987.
•Lee, L.C. JIT and the effects of varying process and setup times. International Journal of Operations and Production Management, 1988.
•Li, Anlong.Co, Henry C. A dynamic programming model for the Kanban assignment problem in a multistage multiperiod production system. International Journal of Production Research, 1991.
•Raymond, Louis. Custom Kanban. Designing the system to meet the needs of your enviroment. Productivity Press, New York, 2006.
•Lummus, Rhonda R. A simulation analysis of sequencing alternatives for JIT lines using kanbans. Journal of Operations Management, 1995.
•Matta et.al. Analysis of assembly systems controlled with kanbans. European Journal of Operation Research, 2005.
•Mitra, Debasis.Mitrani, Isi. Analysis of a Kanban Discipline for Cell Coordination in Production Lines, I. Management Science, 1990.
•Mitra, Debasis.Mitrani, Isi. Analysis of a Kanban Discipline for Cell Coordination in Production Lines, II, Stochastic Demands. Operations Research, 1991.
•Mittal, S.Wang, Hsu-Pin (Ben). Simulation of JIT production to determine number of kanbans. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1992.
•Mitwasi, M. G.Askin, R. G. Production planning for a multi-item, multi-stage Kanban system. International Journal of Production Research, 1994.
•Miyazaki, S.Ohta, H.Nishiyama, N. The optimal operation planning of Kanban to minimize the total operation cost. International Journal of Production Research, 1988.
•Moeeni, F.Sanchez, S. M.Vakharia, A. J. A robust design methodology for Kanban system design. International Journal of Production Research, 1997.
•Ohno, K.Nakashima, K.Kojima, M. Optimal numbers of two kinds of kanbans in a JIT production system. International Journal of Production Research, 1995.
•Onvural, R. Survey of closed queueing networks with blocking. ACM Computing Surveys, 1990.
•PhiIipoom, Patrick R.Rees, Loren P.et.al. An investigation of the factors influencing the number of Kanbans required in the implementation of the JIT technique with Kanbans. International Journal of Production Research, .1987.
•PhiIipoom, Patrick R.Rees, Loren P.et.al. A mathematical programming approach for determining workcentre lotsizes in a just-in-time system with signal kanbans. International Journal of Production Research, 1990.
•PhiIipoom, Patrick R.Rees, Loren P.Taylor III, Bernard W. Simultaneously determining the number of kanbans, container sizes, and the final-assembly sequence of products in a just-in-time shop. International Journal of Production Research, 1996.
•Price, Wilson L.Gravel, Marc.et.al. Modelling the performance of a Kanban assembly shop. International Journal of Production Research, 1995.
•Rees, Loren P.PhiIipoom, Patrick R.et.al. Dynamically adjusting the number of kanbans in just-in-time production system using estimated values of leadtime. IIE Transactions, 1987.
•Rees, Loren P.Huang, P.Y.Taylor III, Bernard W. A comparative analysis of an MRP lot-for-system and a Kanban system or a multistage production operation. International Journal of Production Research, 1989.
•Sarker, Bhaba R.Harris, Roy D. The effect of imbalance in a just-in-time production system: A simulation study. International Journal of Production Research, 1988.
•Savsar, M. Effects of Kanban withdrawal policies and other factors on the performance of JIT systems - a simulation study. International Journal of Production Research, 1996.
•Schonberger, Richard J. Applications of Single-Card and Dual-Card Kanban. Interfaces, 1983.
•Singh, N.Brar, J. K. Modelling and Analysis of Just-in-Time Manufacturing Systems: A Review. International Journal of Operations & Production Management, 1992.
•Sipper, Daniel.Shapira, Reuven. JIT vs. WIP--a trade-off analysis. International Journal of Production Research, 1989.

•Spearman, Mark L.Woodruff, David L.Hopp, Wallace J. CONWIP: a pull alternative to kanban. International Journal of Production Research, 1990.
•Sugimori, Y. Kusunoki, K. Uchikawa, S. Kusunoki, K.Uchikawa, S. Toyota production system and Kanban system Materialization of just-in-time and respect-for-human system. International Journal of Production Research, 1977.
•Suri, Rajan. How to plan and implement POLCA: A matrial control system for high-variety or custom-engineered products. Decision Sciences and Eng. Systems, 2003.
•Sury, RoyStubitz, Steven J. Kanban and Just-In-Time at Toyota (BR). International Journal of Production Research, 1987.
•Takahashi, K.Muramatsu, Rintaro.et.al. Feedback method of production ordering system in multi-stage production and inventory systems. International Journal of Production Research, 1987.
•Takahashi, K. Determining the number of kanbans for unbalanced serial production systems. Computers and Industrial Engineering, 1994.
•Tayur, S. Structural properties and a heuristic for Kanban-controlled serial lines. Management Science, 1993.
•Uzsoy, Reha. Martin-Vega, Louis A. Kanban-based demand-pull systems: a survey and critique. Manufacturing Review, 1990.
•Vatalaro, James. Implementing a mixed model kanban system. The Lean replenishment technique for Pull production. Productivity press, NY. 2003.
•Wang, Hunglin.Wang, Hsu-Pin (Ben). Determining the number of kanbans: A step toward nonstock-production. International Journal of Production Research, 1990.

Reflexiones sobre los propósitos de un curso de matemáticas de primeros semestres en la educación superior en Colombia.

EDGAR A. BARÓN POVEDA. eabaronp@poligran.edu.co
HUGO E. ZAMORA CORONADO. hzamora@poligran.edu.co

RESUMEN

Los supuestos que la Educación Superior en Colombia asume respecto de la formación básica que en matemáticas deben poseer los aspirantes a ingresar en sus aulas, distan de la realidad intelectual del estudiante promedio.

La universidad ha hecho intentos, - usualmente coyunturales -, por subsanar las carencias de los estudiantes, pero en general no se han alcanzado los propósitos de nivelar al estudiante a las exigencias del ente superior.

Se propone una visión de carácter estructural de la problemática, con objeto de lograr que un estudiante de primeros semestres reelabore comprensivamente una noción de matemáticas y por consiguiente, soporte adecuadamente los procesos de abstracción y generalización que le propone el plan de estudios de su carrera.

PALABRAS CLAVE

Aprendizaje, actividad de aprendizaje, didáctica de las matemáticas,.

ABSTRACT

The assumptions that Higher Education in Colombia assume with respect to the basic formation that the candidates must have in mathematics when entering the classrooms are away from the intellectual reality of the average student.

The university has tried - usually circumstantially - to repair the students' lacks; however, in general the objectives have not been reached with respect to the terms of placement of the students regarding the requirements of the institution.

We propose a structural vision of the issue in order to make a freshman learn comprehensively a notion of maths. Therefore, this student will be able to support correctly the abstract and general processes proposed by the plan of studies of his/ her career.

KEY WORDS

Learning, Didactics of Mathematics, Learning Activity.

Edgar Alberto Barón Poveda.
Licenciado en Matemáticas con Especialización en Gerencia de Mercadeo y Docencia Universitaria. Coordinador de Área del Departamento de Matemáticas. Ha publicado los libros: Matemáticas I y Matemáticas Básicas para Mercadeo y Publicidad. (Bogotá: Politécnico Grancolombiano, 2003. Actualmente también se desempeña como profesor en Educación Distribuida.
Sus intereses investigativos giran en torno al aprendizaje de las Matemáticas desde la perspectiva de construcción de conocimiento y las Matemáticas de la teoría de la Elección.

Hugo Edver Zamora Coronado.
Licenciado en Ciencias de la Educación con especialidad en Matemáticas. Especialización en Educación a Distancia. Docente del Departamento de Matemáticas del Politécnico Grancolombiano. Intereses investigativos en torno al aprendizaje por construcción; en particular, el relativo al conocimiento matemático escolar.

ACERCA DE LA FORMACIÓN MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR.

La formación matemática que se proponga a un estudiante de la educación superior, debe ajustarse a las exigencias de una sociedad en evolución constante y que requiere de respuestas eficaces a los interrogantes que plantea a sus integrantes. Por lo tanto, sin dejar de lado los contenidos tradicionales de las matemáticas, que han hecho parte de los planes de estudio de la escolaridad superior, es necesario que el desarrollo de habilidades y capacidades matemáticas esenciales sea explícito en los procesos escolares y se convierta en foco de atención y realización de las labores de difusión del conocimiento matemático.
Entre las destrezas que se deben desarrollar en un ciudadano en formación cabe señalar: el planteamiento y solución de problemas, el desarrollo de pensamiento y razonamiento matemático, la simbolización y argumentación, la modelización y representación, y el establecimiento de conexiones con otras áreas del conocimiento.
Para alcanzar una visión acerca de las maneras como la Educación Superior puede responder a los desafíos respecto de la formación matemática de un egresado de sus aulas, es pertinente reconocer diversos puntos de vista acerca de concepciones de la actividad matemática. Una de tales visiones la provee Miguel de Guzmán cuando afirma que “ La matemática es una exploración de ciertas estructuras complejas de la realidad que, mediante un proceso de simbolización adecuado de los objetos a los que se acerca y mediante una manipulación racional rigurosa de ellos, se dirige hacia un dominio efectivo de dicha realidad”. (De Guzmán, 1998, Pág. 332).
El estudio de diversas formas de la complejidad de la realidad, según el mismo De Guzmán, corresponde al trabajo histórico de la matemática. Basta mirar las aproximaciones tradicionales a la cantidad y la forma que dieron origen a la aritmética y a la geometría. La atención sistemática que el individuo dirige hacia diversas formas de la realidad, permite que otras áreas del conocimiento matemático sean desarrolladas: el álgebra, la probabilidad, la lógica entre otras.

Desde esta perspectiva, cualquier individuo debe enfrentar la complejidad de la realidad, como un requisito para ejercer dentro de la sociedad. El sistema escolar ha sido encargado por la sociedad de proponer acciones que posibiliten en el individuo comprensiones y elaboraciones acerca de dicha realidad. Las matemáticas de la escolaridad se convierten en el espacio natural donde se acerca al ciudadano en formación, a la reflexión sobre los elementos de la realidad física o mental de la que habla De Guzmán. Por lo tanto, el sistema escolar y en particular la Educación Superior deben proveer al estudiante de una formación de calidad que lo habilite para confrontar los retos que la realidad impone, sin importar la complejidad de dicha realidad.
Otra concepción del significado de la actividad matemática muestra el carácter amplio de ella, cuando se señala que: “La matemática es una ciencia exploratoria que busca comprender cualquier tipo de patrón, patrones que ocurren en la naturaleza, patrones inventados por la mente humana e incluso patrones derivados de otros patrones.”(Steen, 1999, pág. 35). Luego, su estudio en la escolaridad debe constituirse en una experiencia de amplio recorrido sobre la cotidianidad física o mental del individuo, con objeto de caracterizar y lograr comprensiones sobre regularidades, variaciones y situaciones afines a los patrones.
En suma, la experiencia matemática que se viva en la Educación Superior debe contribuir en la formación del profesional, a la comprensión de mundos sometidos a fluctuaciones que no necesariamente obedecen a comportamientos señalados por la tradición o por la historia de la evolución de las ideas.

PROBLEMÁTICA DE LOS CURSOS DE MATEMÁTICAS EN LOS PRIMEROS SEMESTRES DE PROGRAMAS DE FORMACIÓN PROFESIONAL

La formación matemática en la educación superior en Colombia está sometida a tensiones propias de supuestos que se hacen respecto de la formación básica de los estudiantes que ingresan a este nivel de formación y de exigencias respecto de la calidad de los egresados del sistema.

En cuanto a los supuestos, es usual asumir que un estudiante que ingresa a la universidad cuenta con conocimientos disciplinares mínimos y con herramientas intelectuales básicas que lo habilitan para abordar los procesos de desarrollo de pensamiento que le plantea su nueva experiencia escolar. Sin embargo, la realidad parece contradecir este supuesto en cuanto se refieren experiencias de docentes de matemática que caracterizan la formación del estudiante que ingresa.

Un estudio en la Universidad del Valle señala que al mismo tiempo con estudiantes de buena formación matemática, se encuentran en el primer semestre de Ingeniería, estudiantes que por su deficiente formación matemática corren el riesgo de abandonar la universidad o permanecer en ella durante lapsos a todas luces de inconveniencia social. (Robledo, 2005). Una encuesta a profesores de la Universidad Nacional de Medellín señalaba, en 1999, la seria preocupación por la "deficiente formación matemática en primaria y secundaria" que redunda en los resultados de los estudiantes y esto "a pesar de los filtros del examen de admisión" (Cossio, 1999). Un artículo que "realiza reflexiones sobre las causas del bajo aprovechamiento estudiantil en el curso de Matemáticas 1" (Posso, 2005), afirma "que el problema no es único de esta universidad" y lo caracteriza en términos de la diferente formación matemática de los recién ingresados como producto de la diferente cantidad de horas semanales de dedicación a matemáticas en sus colegios.
La problemática es de alta sensibilidad en los medios académicos a tal punto que en el año 2005 en la Universidad ICESI de Cali, se desarrolló el evento "Matemáticas: Del bachillerato a la universidad", cuyo objetivo general expresa: "Propiciar un espacio en el cual los responsables del área de Matemáticas, de nivel universitario y de educación básica y media, compartan experiencias, inquietudes y propuestas relacionadas con el desempeño académico y el nivel de conocimientos y competencias en matemáticas, de los estudiantes del primer semestre universitario, frente a los estándares básicos de calidad en matemáticas para la secundaria establecidos por el MEN".

Actualmente, las exigencias respecto de la calidad de la formación de los egresados de la educación superior, se describen en términos de una inserción efectiva del nuevo profesional en el entorno laboral. Descripciones de este orden se denominan competencias y muchas de ellas se relacionan con la formación matemática del egresado. Entre otras se indican: capacidad de análisis y síntesis, toma de decisiones, habilidad para trabajar en forma autónoma, resolución de problemas.
Estas declaraciones que tienden a convertirse en estándares regionales (Europa) con posibilidad de expansión mundial (Tuning, 2003), apenas comienzan a permear la universidad latinoamericana y causan controversia respecto de su impacto en la difusión del conocimiento en la universitadad, pues no tienen aún el respaldo de los gobiernos del área y por tanto, no se han convertido en puntos de referencia del quehacer académico (Tuning América Latina, 2007). Sin embargo, en espacios académicos empieza la discusión acerca de los significados de currículos por competencias, discusión que de hecho problematiza también los entornos escolares, donde se orientan procesos relacionados con la actividad matemática.

La problemática que concurre en el aula de la clase de matemáticas de los primeros semestres, es compleja, pues su actividad se ve influida por las experiencias previas de los estudiantes, pero a la vez debe influir en la formación que empieza a asumir dicho estudiante. Las soluciones propuestas por las instituciones universitarias, con el fin de posibilitar que los estudiantes adquieran los conocimientos matemáticos necesarios para cursar una primera asignatura de matemáticas, en general plantean:

•La formulación y desarrollo de cursos cortos, previos al ingreso del estudiante a las aulas donde se efectúa "un repaso" de los contenidos que requiere el estudiante como anteriores al primer curso de matemáticas.
•La participación del estudiante en un curso semestral "anterior" al primer curso regular de matemáticas donde se "logre la nivelación" del estudiante, es decir donde el estudiante demuestre dominio sobre nociones previas al curso.
•El uso de cursos virtuales, que permitan una aproximación a los requerimientos mínimos para cursar la primera asignatura de matemáticas, en un programa de estudios.
•El manejo de una parte del tiempo que se asigna a una asignatura de matemáticas, para "revisar" los conocimientos anteriores que son requisito para el curso que se toma.
•La utilización de apoyos pedagógicos (monitorías, asesorías, etcétera) que ayuden al estudiante a identificar sus carencias en términos de conocimientos necesarios para el curso y le oriente sobre posibles formas de acceso a estos conocimientos.
Estos intentos de solución son propios de programas de estudio donde las matemáticas son esenciales en el pro-

ceso de formación del profesional, como es el caso de las carreras de ciencias básicas y las ingenierías. Los resultados no parecen ser los esperados, pues docentes de cursos posteriores a un primer curso de matemáticas, perciben que la formación matemática básica de los estudiantes no se acerca a las cada vez mayores exigencias intelectuales que imponen los procesos de desarrollo de pensamiento en cuanto a mayor generalización y abstracción.

En programas donde las matemáticas desempeñan un papel de menor relevancia en la formación, se han asumido parcialmente algunas de las soluciones que se han descrito, o se han tomado caminos que podrían calificarse de extremos. Tal es la situación de programas de estudios que reducen sensiblemente el número de asignaturas de matemáticas que tradicionalmente hacían parte de sus mallas curriculares, o de programas que proponen cursos de matemáticas cuyos contenidos son los mismos de la Educación Básica, o aún programas que consideran factible prescindir de materias de matemáticas en sus planes de estudios.

Un problema adicional parece sumarse a los anteriormente referidos: se considera en varios entornos escolares que la política mundial de cobertura en educación afecta la calidad de la misma, y en particular, la que tiene que ver con la formación en matemáticas. Hasta hace pocos años el sistema de educación superior se caracterizó por la selectividad de sus estudiantes. Rigurosos exámenes de selección garantizaban que a sus “aulas” únicamente ingresaran los mejores egresados de la educación básica y media (esto sigue siendo cierto en muchas de nuestras universidades). Por lo tanto, el supuesto de la buena formación básica de los nuevos estudiantes no tenía discusión. El examen de admisión cumplía sus propósitos.

Pero, las nuevas concepciones alrededor de una sociedad que funda sus quehaceres en el conocimiento, exigen acciones coherentes en el sistema escolar. Por lo tanto, se pregona el acceso a la educación superior por parte de sectores amplios de la población, como uno de los soportes de dichas concepciones. Las cifras mundiales, regionales o locales lo corroboran. En el mundo, entre el año 1990 y el 2005 el número de estudiantes matriculados en programas universitarios de pregrado se incrementó en 48% aproximadamente. En América Latina esta cifra es cercana al 43% y en Colombia es del orden del 40%. (EFA, 2008). Un factor que ha incidido en este repunte es el relacionado con los subsidios estatales para estudiar, o con las facilidades que ofrece el sector financiero para adelantar estudios superiores. Al margen vale la pena anotar, que a pesar de estas cifras positivas, el sistema de educación superior en el mundo apenas acoge (al término del año 2005) en promedio al 24% de la población en posibilidad de acceder a sus aulas.

Para el caso de Colombia, es común la apreciación de que el volumen de estudiantes que ingresa a las aulas universitarias no llena las expectativas del sistema en cuanto a requisitos mínimos de ingreso. Se menciona que esta “universalización” de la educación superior ha contribuido a acentuar problemáticas de adaptación y permanencia dentro de la institución universitaria y que la situación en cursos de matemáticas es todavía más álgida pues los porcentajes de deserción o pérdida de primeros cursos son los más elevados.

Los interrogantes respecto de la formación matemática de los futuros profesionales que requiere el país, saltan a la vista. ¿Cómo posibilitar que los estudiantes que ingresan a las aulas universitarias alcancen niveles de desarrollo de pensamiento compatibles con las exigencias sociales en términos de formación? ¿Cómo asumir el reto que se plantea a la universidad respecto de la diversa formación matemática que tienen los recién ingresados a las aulas y de la necesidad de alcanzar niveles mínimos de conocimientos, destrezas y competencias en matemáticas, que les permita abordar procesos de formación básica en matemáticas? Cómo plantear y ejecutar acciones que promuevan en el estudiante que ingresa a la universidad una cultura de esfuerzo intelectual como base de su proceso de aproximación al conocimiento en términos de formación matemática? ¿Cómo conciliar las políticas de cobertura y culminación de procesos formativos en educación con las políticas de calidad en la formación matemática de un egresado de la educación superior?

CONCEPTUALIZACIÓN DE UNA ACTIVIDAD DE REELABORACIÓN DE UNA NOCIÓN EN MATEMÁTICAS.

Las respuestas a la problemática descrita - lo que parece suceder en los escenarios de los cursos de matemáticas de primeros semestres en la universidad - se han caracteriza-do por un manejo desde la tradición de la enseñanza de la matemática en el nivel superior.

Se parte del supuesto de que la educación básica ha asumido su trabajo con las matemáticas escolares en términos de procesos tales como: acercar a los estudiantes a la manipulación de objetos matemáticos, por ejemplo, los conjuntos numéricos y las operaciones entre sus elementos; o aproximar la identificación y uso de propiedades comunes que subyacen a la manipulación referida; por ejemplo, las propiedades de las operaciones.

Otro supuesto asume que en términos de destrezas y competencias se ha hecho una labor con los llamados procesos básicos de aprendizaje en matemáticas: resolución de problemas, razonamiento y argumentación, comunicación, modelación (Lineamientos curriculares, 1994).

Por lo tanto, se infiere que el desarrollo de un curso de matemáticas de primeros semestres en la universidad se centra en la identificación y usos de estructuras que cobijan los objetos de estudio en las matemáticas de la educación básica y media. El acercamiento a estas estructuras y sus propiedades, debe entonces ser el camino que posibilite un desarrollo de pensamiento de mejor nivel de elaboración y abstracción, con las consecuencias sobre un mayor desarrollo de pensamiento.

Desde es perspectiva, las propuestas de "nivelación" en matemáticas, se centran en un recorrido por los contenidos disciplinares de la educación básica, en una intensidad variable como se describió en otro aparte. La esperanza implícita del planteamiento es, que la revisión que se hace a las temáticas, ayuda a superar carencias, llenar "vacíos", y provee una metodología de estudio en matemáticas. La realidad supera claramente las expectativas que se generan con estos intentos, pues los supuestos respecto del dominio de los aspectos manipulativos de una noción, o del reconocimiento y uso de aspectos comunes a las nociones, no hacen parte del bagaje intelectual del estudiante promedio que en la actualidad accede a las aulas universitarias.

El dilema que se suscita es complejo: por una parte, no es posible considerar que la manera de recuperar al estudiante para la experiencia matemática, sea plantearle el devolverse a realizar el trabajo propio de la escolaridad básica, ya que en términos del tiempo de permanencia aceptable en el ente universitario, generaría una problemática; pero por otra parte, plantear un trabajo de recuperación sin considerar a fondo los diversos aspectos que se deben dominar de una noción en matemáticas, se constituye en una "pérdida" de tiempo dentro del proceso de formación profesional.

Entonces, hay que considerar otros elementos que ayuden a dilucidar un curso de acción que contribuya al manejo de la problemática identificada y que consulten la realidad del estudiante, del docente y del sistema escolar.

•Las propuestas de recuperación para la experiencia matemática de un estudiante que ingresa a las aulas universitarias, deben sustentarse en la reelaboración de una noción. Con este término se quiere señalar que hay que reconocer que el estudiante tiene en su haber algún tipo de conocimiento relacionado con una noción en estudio, en particular si esta es una noción que se declara como propia de los procesos de la escolaridad básica o media en matemáticas. Por lo tanto, hay que adelantar acciones o proponer actividades que permitan identificar los procedimientos y las concepciones que subyacen a estos procesos, cuando un estudiante trabaja en situaciones relacionadas con una noción.

A este respecto, se deben generar experiencias que coloquen al estudiante en situación de proponer formas de solución a interrogantes relacionados con la noción y que lo conminen a revisar, reconstruir y comunicar dichos procedimientos. Es importante que el estudiante declare las justificaciones que desde su mirada soportan los procedimientos asumidos. De aquí se debe posibilitar un trabajo de confrontación y validación de lo que cree que conoce el estudiante sobre la noción estudiada.

La reelaboración de la noción se refiere entonces al camino que en conjunto con el docente, recorra el estudiante para alcanzar comprensiones de los elementos que constituyen la noción en estudio, y por lo tanto, lograr elaboraciones con dicha noción en contextos donde esta accione. La actividad o actividades de reelaboración señalan acciones por desarrollar - en espacios tanto en el aula o fuera de ella, físicos o virtuales – para cumplir los propósitos de la reelaboración de la noción.

Aquí es fundamental la responsabilidad que asuma el estudiante respecto del proceso de reelaboración anunciado. Esto es, se precisa de un compromiso individual, decidido y continuo del estudiante para transitar este camino de reelaboración propuesta. La transformación intelectual es una decisión del estudiante, y por tanto, un acto de la razón (Gallego, 1992).

•Proponer actividades en el camino de reelaboración de una noción, plantea el interrogante acerca de las concepciones que soportan las actividades. Señalar que la tradición de la enseñanza en educación superior enmarca los intentos de solución de la problemática respecto de la formación básica en matemáticas, significa que la docencia en matemáticas en educación superior se ejerce en analogía con la matemática como conocimiento lógico deductivo, o mejor aún intentando emular el trabajo del matemático que prefiere "confiar en sus concepciones estructurales, aunque también utiliza las procedimentales" (Kieran, 1992). Esta visión sin duda es procedente en cursos de nivel superior y con estudiantes que poseen conocimientos disciplinares básicos y procesos de pensamiento adecuados a la exigencia intelectual del nuevo conocimiento.

Sin embargo, en los cursos de matemáticas de primeros semestres de un programa de estudios universitarios, vale la pena examinar la pertinencia de un ejercicio docente que acentúa su trabajo en la concepción estructural de la noción, y en cambio considera que la concepción procedimental de la misma es superflua o poco importante de cara al logro de propósitos señalados para el curso. Pero como la misma autora Kieran señala, "..se ha mostrado que tanto la enseñanza como el contenido enfatizan las consideraciones estructurales y que los estudiantes no lo perciben así" (Kieran, 1992).
Las ideas de concepción procedimental y estructural de una noción son acuñadas por Anna Sfard como dos formas de concebir una noción de matemáticas. En cuanto a la primera idea se refiere al reconocimiento que se hace de la existencia de una noción como potencial, es decir producto de acciones, en cambio en la concepción estructural la noción es referida como si tuviese existencia real y por lo tanto se reconoce y manipula a primera vista sin requerir detalles. Esta visión se remite también a la existencia de etapas históricas de la evolución de una noción en matemáticas y permite ver "el álgebra escolar como una serie de ajustes proceso–objeto que los estudiantes deben hacer para comprender el aspecto estructural del álgebra" (Kieran, 1992).

Es fundamental entonces que el docente de un primer curso de matemáticas en la universidad, examine las formas como usualmente ha aproximado a sus alumnos al estudio de una noción y cuáles son los acentos que se han dado a dicha aproximación. Este ejercicio requiere de una mirada profunda a los soportes de la cotidianidad de la labor docente, en cuanto se identifique (por cada uno) cuáles son los elementos orientadores de dicha labor. Por ejemplo, ¿un texto señala el camino de acción del docente? ¿Un programa de contenidos indica la ruta correcta de trabajo? ¿Las indicaciones e instrucciones de departamentos de matemáticas responsables de los cursos, imponen la forma de trabajo con el estudiante? Las respuestas permitirán reconocer cómo se conciben las actividades que usualmente se proponen como recursos de nivelación de conocimientos y habilidades en matemáticas para determinar sus posibles impactos en la transformación del nuevo estudiante.

Las actividades que posibiliten la reelaboración de una noción demandan una declaración de intencionalidad, en cuanto docente y estudiante puedan, a través de esta declaración, identificar qué acciones deben llevar a cabo para alcanzar los propósitos de sus cursos de matemáticas. Esta explicitación evitará que los supuestos sobre el posible impacto de una actividad guíen el quehacer del aula. Por ejemplo, se atacarían creencias acerca de la realización de un sinnúmero de ejercicios extraídos de diferentes textos, como soporte de comprensión de una noción. O se confrontarían convicciones de aprendizaje basadas en la visualización de la experticia del docente. En suma se puede esperar un desempeño tanto del docente como del estudiante, que consulte los intereses y responsabilidades de cada uno en el camino de la reelaboración de la noción en estudio.

•Construir la intencionalidad de una actividad de reelaboración de una noción básica de matemáticas, en un curso de matemáticas de primeros semestres, requiere una reflexión sobre los soportes del quehacer docente y sobre el papel que institucionalmente se asigna a la actividad.

En este sentido es importante comprender y declarar que la tradición señala que el sistema de educación superior como todo el sistema escolar tiene un eje de acción: la enseñanza; es decir, se asume que el aprendizaje se deriva de ella y como tal las actividades denominadas de innovación, o las reformas escolares, se centran en mejorar la enseñanza con la expectativa que ello mejore el aprendizaje. Ahora, en las nuevas exigencias que la sociedad hace al sistema escolar, se ha declarado que el aprendizaje debe constituirse en el centro de las actividades de la escolaridad.

Los intentos de responder a este papel que se quiere asignar a la escolaridad, requieren esfuerzo, reflexión e indagar acerca de los elementos que posibiliten este tránsito de uno a otro eje de acción. Así se evitaría la tradicional adaptación que los miembros de la comunidad escolar asumen cuando de reformas a la escolaridad se trata.

En lo que se refiere a la práctica docente en cursos de matemáticas de primeros semestres, es preciso que se miren en detalle las creencias que usualmente soporta este ejercicio. Como creencias se asume lo que los maestros consideran debe ser, sin cuestionamiento ni explicación, con respecto a las formas de trabajo en el aula y las posibilidades de modificación de las mismas. De estas creencias forman parte entre otras, lo que el maestro piensa acerca del conocimiento matemático, del papel del individuo que aprende, del maestro y del cómo se aprende. (Ortiz Hurtado, 1999)

En este sentido se requiere el planteamiento de acciones que ayuden a superar creencias sobre el quehacer docente en matemáticas, que se aferran a la norma, o aquellas que se sustentan en una práctica determinada porque siempre ha sido así, porque así se ha enseñado tradicionalmente y así se ha aprendido.

Las acciones de las que se habla, deben posibilitarse desde una mirada a los elementos que constituyen la actividad matemática en un curso a los que se ha referido este escrito. Las concepciones que se tienen sobre: la matemática, el conocimiento matemático escolar, la función del docente, la evaluación, el papel del el estudiante, los recursos, deben ser expuestas claramente por el docente y contrastadas con los soportes de dichas concepciones, con el fin de visualizar posibles caminos de acción.

La tarea que se describe superficialmente es enorme; está mediada por problemáticas sociales que afectan la labor docente y corre el riesgo de no ser abordada adecuadamente, a menos que se identifiquen alternativas susceptibles de concretarse en la realidad que vive el docente en cuanto a su práctica profesional, en cursos de matemáticas de primeros semestres.

Dos alternativas son viables como forma de trabajo y pueden contribuir a la construcción de propuestas de actividades de reelaboración de nociones de matemáticas,

•La aproximación a la producción académica relacionada con las situaciones escolares de trabajo con las matemáticas. En este sentido, se ha generado un tipo de conocimiento denominado didáctica de las matemáticas. En particular se ha investigado ampliamente sobre tópicos relacionados con el álgebra escolar y los rudimentos del cálculo, los cuales parecen ser los temas centrales de los cursos de matemáticas en los primeros semestres de un programa de estudios universitarios.

La bibliografía existente provee información y abre expectativas de acción sobre aspectos relacionados con la enseñanza, con el aprendizaje, con el contenido propio de una temática, o con el impacto de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos mencionados.

•La incursión en el estudio a profundidad de las características que debe tener un sistema escolar que declare el aprendizaje como su centro de acción y de su influencia en la clase de matemáticas, o en el estudio de los soportes que posibiliten el tránsito de una escolaridad en matemáticas con base en la enseñanza a una que se soporte en el aprendizaje, o a la caracterización de una educación matemática centrada en el aprendizaje.

Una forma plausible de abordar las alternativas que se proponen, es la selección de una temática propia del álgebra escolar o de los rudimentos del cálculo y explorarla desde perspectivas señaladas por la didáctica de las matemáticas.

•Un aspecto esencial para abordar el trabajo de actividades de re-elaboración de una noción en matemáticas es el institucional. De las definiciones y orientaciones que la institución universitaria señalen en cuanto a tiempos, espacios recursos y noción de calidad para cursos de matemáticas de primeros semestres, dependerá en gran medida que propuestas de solución a la problemática abordada tengan posibilidades reales de ejecución.

Las definiciones y orientaciones de que se habla antes, requieren a su vez de un marco de acción referido a las declaraciones que en cuanto a flexibilidad y cobertura sean asignadas por la institución a los cursos referidos. Respecto de la flexibilidad es preciso que la institución dé espacio para reconocer el estado real de los estudiantes que acceden a sus aulas, en cuanto a conocimientos previos en matemáticas y habilidades de pensamiento básicas. Esto posibilitará planteamientos de cursos que consulten este estado e intenten conciliarlo con las exigencias intelectuales para avanzar en el desarrollo de pensamiento superior. Así mismo generará una visión de un curso de matemáticas el cual no accione alrededor del cumplimiento rígido de un cronograma de contenidos, sino alrededor de actividades de reelaboración de nociones básicas en matemáticas.

En cuanto a la cobertura de un curso de matemáticas de estos primeros cursos, es importante que la institución indique en términos de procesos de formación de pensamiento superior cuales son susceptibles de desarrollarse desde tales cursos. Aquí hay una responsabilidad para los programas de estudio de la institución, la de formular los propósitos de incorporación de una formación básica en matemáticas dentro de sus mallas curriculares. Esta declaración es pertinente como elemento orientador de las propuestas de cursos de matemáticas y señalan rutas a explorar en conjunto por docente y estudiante en el camino de formación de este último.

Ahora, con un marco de referencia claro será posible que los responsables de la elaboración de planes de estudio de un programa, piensen en la determinación de tiempos mínimos exigibles a un estudiante para que alcance el nivel intelectual requerido para abordar con éxito los procesos propuestos en tales planes de estudio. Para el caso de los cursos de matemáticas, será factible una declaratoria de estos tiempos en términos de la obligación de reelaborar nociones fundamentales para su avance en el estudio de la disciplina. Aquí será de gran importancia catalogar el tiempo de estudio del estudiante como elemento primordial hacia el logro de objetivos propuestos. La especificación de tiempo de trabajo tanto en la clase como extraclase necesario para asumir la tarea propuesta, será clave para garantizar posibilidades de éxito al curso de matemáticas que se desarrolle. Así mismo proveerá elementos para asumir administrativamente el curso desde la perspectiva de créditos académicos.

La declaración de los espacios susceptibles de activarse con la propuesta de reelaboración de una noción en matemáticas, será crucial para alcanzar logros esperados. Espacios físicos (en el aula o fuera de ella) o virtuales, deben ser caracterizados por la institución para que sean susceptibles de ser usados por la comunidad universitaria en el trabajo conjunto que se prevé. La asignación de recursos también es factor vital para desarrollar los cursos de matemáticas desde las visiones antes señaladas.

Finalmente un factor determinante en el desarrollo de las actividades de reelaboración caracterizadas a lo largo del escrito, es el relacionado con lo que entiende la institución como calidad en la educación y formación matemática de sus estudiantes. Esta declaración debe servir como guía de evaluación del trabajo que se proponga para que un estudiante que ingrese a la universidad, desde cualquier nivel de formación en matemáticas dado, logre acceder a los requerimientos intelectuales mínimos necesarios para asegurar su formación básica en matemáticas. Y que logre realizar un tránsito por un programa de estudios que le permita alcanzar mejores comprensiones sobre el conocimiento abordado y luego le asegure un ejercicio profesional riguroso.

A MANERA DE CONCLUSIÓN.

La problemática que atraviesa el desarrollo de cursos de matemáticas de primeros semestres del sistema de educación superior, es susceptible de ser considerada desde una perspectiva integral, en cuanto los diversos estamentos que constituyen esta comunidad escolar asumen papeles de responsabilidad en la transformación de dichos cursos.

La caracterización de una actividad de reelaboración de una noción en matemáticas provee un marco de referencia para construir propuestas que dinamicen los espacios asignados a cursos de matemáticas de primeros semestre, en una perspectiva de recuperación del estudiante para la actividad matemática, de replanteamiento de la práctica docente en matemática en un nivel superior y de la declaración de responsabilidades de la institución universitaria.

Se abren interrogantes acerca de elementos puntuales vinculados con las actividades de reelaboración y los cuales deben ser sujeto de estudio para configurar propuestas coherentes. Elementos de este orden son entre otros la evaluación, el contexto de acción de una noción en matemáticas, la validación del conocimiento que se tenga de una noción en matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

•Cossio J y Tejada D. (1999). “Errores típicos en matemáticas de los estudiantes de primer semestre de la universidad” [en línea], disponible en:<http://www2.unalmed.edu.co/dyna2005/128/errores.html>, consultado: 8 de julio de 2008.

•De Guzmán, M. “Matemáticas y estructura de la naturaleza.” En F Mora y J Segovia de Arana. Ciencia y sociedad: Desafíos de conocimiento ante el tercer milenio. Oviedo. Fundación Santander Central Hispano, BSCH. Págs. 327 – 358.

•GALLEGO, Rómulo. Saber pedagógico. Una visión alternativa. Bogotá: Cooperativa Editorial del Magisterio, 1992 .

•Kieran, C. (1992). “The learning and teaching of school algebra”, disponible en: <http://dme.ufro.cl/pmat/images/Documentos/aprendizaje%20del%20algebra%20en%20e l%20liceo.pdf>, consultado: 5 de junio de 2008

•Lineamientos curriculares. Bogotá. Magisterio. 1998.

•Ortiz Hurtado, Myriam. La iniciación de la aritmética. Una propuesta de formación de profesores desde la perspectiva del aprendizaje. Tesis de doctorado. México. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. Doctorado en Matemática Educativa, 1999.

•Posso, A. (2005). “Sobre el bajo aprovechamiento en el curso de matemáticas I de la UTP“ [en línea], disponible en: <http://www.utp.edu.co/php/revistas/ScientiaEtTechnica/docsFTP/164230169-174.pdf>, Consultado: 8 de julio de 2008.

•Robledo, J. (2005). “Formación matemática en un primer curso de matemáticas de la Universidad del Valle.”[en línea], disponible en: <http://www.icesi.edu.co/evenmat/memorias/ConferenciaRobledo.pdf>, consultado: 8 de julio de 2008.

•Steen, Lynn. La enseñanza agradable de las matemáticas. México: Limusa. 2004

•TUNINGAMERICALATINA,(2003).“TuningEducational structures in Europe”[en linea], disponible en: <http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=com_docman&Itemid=191&task=view_category&catid=9&order=dmdate_published&ascdesc=DESC>, consultado: 24 de junio de 2008.

•TUNING AMERICA LATINA, (2007). “Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina” [en línea], disponible en: <http://tuning.unideusto.org/tuningal/index.php?option=com_docman&Itemid=191&task=view_category&catid=22&order=dmdate_published&ascdesc=DESC>, consultado: 24 de junio de 2008.

• UNESCO, (2008). “Educación para todos en 2.015 ¿Alcanzaremos la meta?” [en línea], disponible en: <http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001548/154820s.pdf>, consultado: 21 de junio de 2008.

Álgebras Booleanas Super-Magras y Algunas Aplicaciones a la Teoría de Modelos

JAIME POSADA
japosada@poligran.edu.co

RESUMEN
En este trabajo es un acercamiento a las álgebras booleanas super-magras que permiten estudiar facetas de la teoría de modelos presentes en la demostración del teorema de Morley. Esencialmente son álgebras booleanas tales que su espacio de Stone no crece demasiado. Su estudio permitirá simplificar algunos argumentos involucrados en el teorema de Morley, entre ellos la siguiente implicación:
Si T es una teoría ω-estable enumerable con modelos infinitos entonces T es κ-estable para todo $\kappa \geq \omega$.

ABSTRACT
In this article we work with certain boolean algebras called super-lean which can be used to study some model-theoretic facts involved in the proof of Morley's theorem. A super-lean algebra is essentially an algebra such that its Stone space does not grow too much in size. Using those algebras, one can simplify some arguments involved in Morley's theorem such as the following implication: If T is a ω-stable countable theory with infinite models, then T is ω-stable for all $\kappa \geq \omega$.

PALABRAS CLAVE/KEYWORDS
Algebras Booleanas, Teoría de Modelos / Boolean Algebras, Model Theory

Jaime Posada
Se desempeña como profesor de tiempo completo del departamento de matemáticas del Politécnico Grancolombiano desde el segundo semestre de 2006. Cuenta con un M.A en matemáticas finalizado en mayo de 2006 en la Univeridad de Wisconsin en Madison.

1. Introducción

Los en los años 50 conjeturó que si una teoría T enumerable es categórica en algún cardinal no enumerable entonces T es categórica en todos los cardinales no enumerables. Morley probó esta conjetura en el 65 para teorías enumerables [M65] y en ese camino surgió la noción de estabilidad.

Para ello introdujo espacios topológicos de tipos, definiendo un rango (hoy en día conocido como rango de Morley) en fórmulas y tipos. La construcción de este rango se basa en el rango de Cantor-Bendixson para espacios topológicos. El análisis del rango permite calcular los tamaños de los espacios de tipos. Una teoría se dice totalmente trascendente si todos los tipos tienen rango de Morley ordinal. Lo anterior es equivalente a que sobre subconjuntos contables, existan a lo más contables tipos; esto último es llamado ω-estabilidad. Este concepto es clave para el desarrollo de la prueba del teorema de Morley; permite construir modelos primos y atómicos sobre subconjuntos potencialmente no enumerables, etcétera.

Los espacios de tipos son espacios topológicos booleanos y un tipo maximal puede verse como un ultrafiltro de una álgebra de Lindenbaum. Además estas álgebras booleanas permiten estudiar frecuentemente algunas propiedades modelo-teóricas de una teoría de primer orden. Como ejemplo se tiene al teorema de Ryll-Nardzewski: Una teoría enumerable T es ω-categórica si y solamente si para todo $n < \omega,\ B_n(T)$ (álgebras de Lindenbaum) es finita.

En este trabajo se pretenden exponer herramientas booleanas que permiten estudiar facetas de la teoría de modelos presentes en la demostración del teorema de Morley.

La principal herramienta es el análisis del tamaño del espacio de Stone de una álgebra booleana. Concretamente se estudian las álgebras booleanas que posteriormente se llamarán super-magras. Esencialmente son álgebras booleanas tales que su espacio de Stone no crece demasiado en tamaño. Su estudio permitirá separar algunos argumentos puramente booleanos involucrados en el teorema de Morley, entre ellos la κ- estabilidad de una teoría. Al usar las álgebras super-magras, se prueba la equivalencia entre la noción modelo-teorica de ω-estabilidad y el hecho de que ciertas álgebras de Lindenbaum sean super-magras. Como corolario a este hecho se tendrá la κ-estabilidad ($\kappa \geq \omega$.) de una teoría ω-estable. Los anteriores aspectos, entre otros, permitirán por tanto investigar si el teorema de Morley es un hecho "booleano".
Comenzamos este trabajo con una breve introdu cción al álgebra booleana y a la teoría de modelos. Posteriormente se exponen algunas de las conexiones presentes entre dichas ramas.

Notación y Convenciones

•Los ordinales y cardinales se notarán indistintamente con letras griegas. Se reservarán las letras $\kappa, \lambda, \mu, \nu, .$ para cardinales y $\alpha, \beta, \gamma, \delta, . .$ para ordinales.

•Las letras caligráficas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ denotan álgebras booleanas.

•Las letras góticas $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, .$ denotan estructuras y A,B,C, . . . sus universos.

•Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Entonces $\mathcal{L}^n$ denota el conjunto de fórmulas de primer orden de $\mathcal{L}$ cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_i : i < n\}$.

•Si X es un conjunto, $^{<\omega}X$ es el conjunto de todas las sucesiones finitas de X. Es decir: $^{<\omega}X = \bigcup_{n<\omega} X^n$.

2. ÁLGEBRAS BOOLEANAS

2.1. Conjuntos parcialmente ordenados

Definición 2.1. **Un orden parcial** en un conjunto P es una relación binaria $\leq$ que satisface las siguientes propiedades:

OP_1. *Para todo $x \in P, x \leq x$ (**reflexividad**).*
OP_2. *Para cualesquiera $x, y \in P$, si $x \leq y$, $y \leq x$, entonces $x = y$ (**antisimetría**).*
OP_3. *Para cualesquiera $x, y \in P$ si $x \leq y$, $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (**transitividad**).*

Un conjunto **parcialmente ordenado** es un conjunto dotado de un orden parcial. Si A es subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado P, una **cota superior** de A es un elemento $z \in P$ tal que para todo $x \in A,\ x \leq z$
Un elemento $z \in P$ es **mínima cota superior** de A si es una cota superior de A y para cualquier otra cota superior w de $A,\ z \leq w$. Si existe la mínima cota superior de A es única por antisimetría y se denota sup(A). Se define $x \vee y$ =sup $(\{x, y\})$. Similarmente se define la **máxima cota inferior** y se denota por $x \wedge y$. Es fácil ver que las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son asociativas, conmutativas e idempotentes (esto último es que $x \vee x = x \wedge x = x$).

Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado donde cada par de elementos $x, y \in P$ tienen una mínima cota superior y una máxima cota inferior.
Un retículo L con **0** y **1** es un retículo con elementos **0, 1** $\in L$, $(\mathbf{0} \neq \mathbf{1})$ tales que $\mathbf{0} \leq x \leq$ para todo $x \in P$.
Un retículo L se dice **complementado** si tiene **0**, **1** y para cada $x \in L$ existe un elemento $y \in L$, llamado un complemento para x, , que satisface:

$$x \vee y = \mathbf{1} \text{ y } x \wedge y = \mathbf{0}$$

Una retículo L se dice **distributivo** si para todo $x, y, z \in L$ las siguientes identidades son ciertas:

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$
$$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

Definición 2.2. Una álgebra booleana es un retículo complementado y distributivo.

Se puede probar que en una álgebra booleana el complemento de un elemento es único. De ahora en adelante el complemento de x se notará x^*.

Definición 2.3. Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ álgebras booleanas. Un **homomorfismo** de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ es una aplicación $F : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ que respeta la operaciones booleanas. Es decir: Para todo $x, y \in \mathcal{B}_1,\ F(x \wedge y) = F(x) \wedge F(y)$. Similarmente para $\vee, {}^*$. Un isomorfismo de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ es un homomorfismo biyectivo.

Definición 2.4. Una **subálgebra** de una álgebra booleana $\mathcal{B}$ es un subconjunto no vacío $\mathcal{A}$ que es cerrado bajo las operaciones booleanas en $\mathcal{B}$. Es fácil probar que la intersección de una familia de subálgebras de una álgebra booleana es también una álgebra booleana.
Por lo anterior, dado X subconjunto de una álgebra booleana $\mathcal{B}$,el conjunto $\langle X \rangle = \bigcap\{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} : X \subseteq \mathcal{A}\ y\ \mathcal{A}$ es subálgebra de $\mathcal{B}\}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}$, la cual se llamará **subálgebra de $\mathcal{B}$ generada por X.**

Lema 2.1. Si X es infinito entonces $|\langle X \rangle| = |X|$. [1]

Demostración: Se puede demostrar que la subálgebra generada por un conjunto X consiste de los elementos de la forma $\bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{m} x_{jk}$ donde para todo $j, k,\ x_{jk} \in X$ o $x_{jk}^* \in X$ [BM, CH. 4, § 3, Problem2.4,(ii)].Dela anterior construcción finitaria se sigue que $|\langle X \rangle| = |X|$ ya que si $S_\omega(X)$ denota el conjunto de las partes finitas de X, entonces si X es infinito tenemos que $|S_\omega(X)| = |X|$. ☑

2.2. Filtros y Ultrafiltros

Definición 2.5. Un filtro propio en una álgebra booleana $\mathcal{B}$ es un subconjunto no vacío F de $\mathcal{B}$ que satisface las siguientes condiciones:

$F_1.\ Para\ todo\ x, y \in F,\ x \wedge y \in F.$

$F_2.\ Para\ todo\ x \in F,\ y \in \mathcal{B},\ si\ x \leq y\ entonces\ y \in F.$

$F_3.\ \mathbf{0} \notin F.$

De ahora en adelante, al referirnos a un filtro, nos estaremos refiriendo a un filtro propio.
Ejemplos:
1. $\{1\}$ es un filtro.
2. Para cada $x \in \mathcal{B}$ el conjunto $F_x = \{y \in \mathcal{B} : x \leq y\}$ es un filtro, llamado el filtro principal generado por x.Es sencillo probar que si $\mathcal{B}$ es finita entonces todo filtro en $\mathcal{B}$ es principal.

Definición 2.6. Un subconjunto X de una álgebra booleana $\mathcal{B}$ se dice que tiene la propiedad de intersecciones finitas (abreviada p.i.f) si cuando $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ entonces $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k \neq 0$.
La anterior propiedad justamente indica cuando un subconjunto de una álgebra booleana esá incluido en un filtro, para ello:

Teorema 2.1. Un subconjunto X de un álgebra booleana $\mathcal{B}$ está incluido en algún filtro en $\mathcal{B}$ si y solo si X tiene la p.i.f.

Demostración: Ver [BS, CH. 1, § 2, Lemma 2.8].

Los filtros de un álgebra están parcialmente ordenados por inclusión. Los filtros que son maximales respecto a este orden se les llama **ultrafiltros**. Los ultrafiltros se pueden caracterizar como sigue.

Teorema 2.2. Si F es un filtro en una álgebra booleana $\mathcal{B}$, F es ultrafiltro si y solo si para cada $x \in \mathcal{B},\ x \in F\ o\ x^* \in F$, pero no ambos.

Demostración: Ver [BS, CH. 1, § 3, Lemma 3.1]. ☑

Surge la pregunta si dada una álgebra booleana $\mathcal{B}$ realmente existe un ultrafiltro U en $\mathcal{B}$. La respuesta es afirmativa asumiendo el axioma de elección como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. (TEOREMA DEL ULTRAFILTRO). Todo filtro en una álgebra booleana puede extenderse a un ultrafiltro.

Demostración: Se sigue de un uso estándar del Lema de Zorn. ☑

Corolario 2.1. Un subconjunto de una álgebra booleana está incluido en un ultrafiltro si y solo si cumple la p.i.f.
Demostración: Es una consecuencia del teorema 2.1 y del teorema del ultrafiltro. ☑

2.3. Dualidad de Stone

En los artículos [St36], [St37], M.H. Stone explora la aplicación de conceptos topológicos a la teoría de álgebras booleanas y las aplicaciones de la teoría de anillos booleanos a la topología general. En esta sección exponemos algunos de los resultados de M.H. Stone.

Definición 2.7. Un espacio topológico (X, τ) es un espacio Booleano si es (i) de Hausdorff, (ii) es compacto y (iii) tiene una base de clopens.

1Este lema es válido en cualquier álgebra con operaciones finitarias.

Definición 2.8. Sea $\mathcal{B}$ una álegebra booleana. Definimos $S(\mathcal{B})$ como el espacio topológico que consta de la cole cción de todos los ultrafiltros de $\mathcal{B}$ y cuya topología está dada por la base que consiste de todos los conjuntos $K_x = \{U \in S(\mathcal{B}) : x \in U\}$ para $x \in \mathcal{B}$.El espacio $S(\mathcal{B})$ se **llamará espacio de Stone** de $\mathcal{B}$.

Teorema 2.4. (Stone). El espacio de Stone $S(\mathcal{B})$ de una álgebra booleana $\mathcal{B}$ es un espacio booleano y la aplicación $\varphi : \mathcal{B} \to C(S(\mathcal{B}))$ tal que $\varphi(x) = K_x$ es un isomorfismo de $\mathcal{B}$ en $C(S(\mathcal{B}))$.

Corolario 2.2. (Teorema de Representación de Stone). Toda álgebra booleana $\mathcal{B}$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathbb{P}(X)$ para X algún conjunto.

Teorema 2.5. (Stone). Cada espacio booleano es homeomorfo al espacio de Stone de su álgebra característica.

Los anteriores teoremas establecen una dualidad en el sentido que 'S' y 'C' son operaciones'inversas' y por lo tanto hay una correspondencia uno a uno entre ´algebras booleanas y espacios booleanos. De hecho M.H Stone establece las siguientes correspondencias (entre otras):

Álgebras booleanas ↔ Espacios booleanos
Filtros ↔ Subconjuntos cerrados
Homomorfismos ↔ Funciones continuas

Para una demostración de los anteriores resultados remitimos al lector a [BS, CH. 1, § 6].

3. Cardinalidad de espacios de Stone

3.1. Cotas superior e inferior

Sea $\mathcal{B}$ una álgebra booleana finita. Se puede probar que $|\mathcal{B}| = 2^{|S(\mathcal{B})|}$ y por lo tanto $|S(\mathcal{B})| < |\mathcal{B}|$.La situación es completamente distinta cuando $\mathcal{B}$ una álgebra booleana infinita como se mostrará a continuación.

Lema 3.1. Sea $\mathcal{A}$ subálgebra propia de una álgebra booleana $\mathcal{B}$ y sea $u \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Entonces existen ultrafiltros $F, G \in S(\mathcal{B})$ tales que $u \in F \setminus G$ y $F \cap \mathcal{A} = G \cap \mathcal{A}$.

Demostración: Sea $\varphi : \mathcal{B} \to C(S(\mathcal{B}))$ isomorfismo como en el teorema de representación de Stone. Se demostrará en realidad que existen $F' \in \varphi(u)$, $G' \in \varphi(u^*)$ tales que para todo $a \in \mathcal{A}$, $F' \in \varphi(a) \Leftrightarrow G' \in \varphi(a)$; y con ello se sigue que $u \in F' \setminus G'$ y $F' \cap \mathcal{A} = G' \cap \mathcal{A}$ ya que si $x \in F' \cap \mathcal{A}$, tenemos que $x \in F' \cap \mathcal{A}$. y por lo tanto $G' \in \varphi(x)$, es decir $x \in G' \cap \mathcal{A}$ Similarmente si $x \in F' \cap \mathcal{A}$. entonces $x \in F' \cap \mathcal{A}$.Supongamos por contradicción que no es posible encontrar dichos ultrafiltros F', G', es decir: para todo $F \in \varphi(u)$ y para todo $G \in \varphi(u^*)$, existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $F \in \varphi(x)$ y $G \notin \varphi(x)$ o $F \notin \varphi(x)$ y $G \in \varphi(x)$.

Sea $G \in \varphi(u^*)$ fijo, sin pérdida de generalidad para todo $F \in \varphi(u)$, existe $x_F \in \mathcal{A}$ tal que $F \in \varphi(x_F)$ y $G \notin \varphi(x_F)$. Se sigue que $\{\varphi(x_F) : F \in \varphi(u)\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\varphi(u)$. Como $S(\mathcal{B})$ es compacto y $\varphi(u)$. es cerrado entonces $\varphi(u)$ es compacto. Luego existen $x_{F_1}, x_{F_2}, \ldots, x_{F_k} \in \mathcal{A}$ tales que:

$$\varphi(u) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \varphi(x_{F_i}) \quad \text{y} \quad G \notin \bigcup_{i=1}^{k} \varphi(x_{F_i})$$

como φ es isomorfismo

$$\varphi(u) \subseteq \varphi\left(\bigvee_{i=1}^{k} x_{F_i}\right) \quad \text{y} \quad G \notin \varphi\left(\bigvee_{i=1}^{k} x_{F_i}\right)$$

como $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}$ se sigue que para todo $G \in \varphi(u^*)$, existe $x_G = \bigvee_{i=1}^{k} x_{F_i} \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(u) \subseteq \varphi(x_G)$ y $G \notin \varphi(x_G)$. Se sigue que $\{\varphi(x_G^*) : G \in \varphi(u^*)\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\varphi(u^*)$. Por compacidad de nuevo, existen $x_{G_1}^*, x_{G_2}^*, \ldots, x_{G_n}^* \in \mathcal{A}$ tales que:

$$\varphi(u^*) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \varphi(x_{G_i}^*) \quad \text{y} \quad \forall i \;\; \varphi(u) \subseteq \varphi(x_{G_i})$$

tomando complementos tenemos:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi\left(x_{G_i}^*\right)^c \subseteq \varphi(u)$$

o equivalentemente:

$$\varphi\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_{G_i}\right) \subseteq \varphi(u)$$

por otro lado como $\varphi(u) \subseteq \varphi(x_{G_i})$ para toda i, entonces

$$\varphi(u) \subseteq \varphi\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_{G_i}\right)$$

concluimos de lo anterior que

$$\varphi(u) = \varphi\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_{G_i}\right)$$

Como φ es isomorfismo y A es subálgebra de $\mathcal{B}$ tenemos que

$$u = \bigwedge_{i=1}^{n} x_{G_i} \in \mathcal{A}$$

pero esto es una contradicción ya que habíamos supuesto $u \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. ☑

Teorema 3.1. Sea $\mathcal{B}$ una álgebra booleana infinita. Entonces $|\mathcal{B}| \leq |S(\mathcal{B})| \leq 2^{|\mathcal{B}|}$

Demostración: Sea $|\mathcal{B}| = \kappa$ y supongamos por contradicción que $|S(\mathcal{B})| < \kappa$. Sea

$$X = \{(F, G) \in S(\mathcal{B}) \times S(\mathcal{B}) : F \setminus G \neq \emptyset\}$$

Para cada $x = (F, G) \in X$,
sea $u_x \in F \setminus G$. Sea $\Gamma = \{u_x : x \in X\}$. Es fácil ver que para cualquier álgebra booleana $\mathcal{B}$, $|\mathcal{B}| \leq 2^{|S(\mathcal{B})|}$luego si $|\mathcal{B}|$ es infinita entonces $S(\mathcal{B})$ es infinito.
Por lo tanto Γ es infinito. Consideremos $\mathcal{A} = \langle\Gamma\rangle$ (subálgebra generada por Γ) y notemos que:

$$|\mathcal{A}| = |\Gamma| \leq |S(\mathcal{B}) \times S(\mathcal{B})| = |S(\mathcal{B})| < \kappa$$

Entonces $|\mathcal{A}| < \kappa$. Ya que $|\mathcal{B}| = \kappa$ es posible encontar $u \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Por el lema anterior sean $F', G' \in S(\mathcal{B})$ tales que $u \in F'$, $u \notin G'$, $F' \cap \mathcal{A} = G' \cap \mathcal{A}$.
Es claro que $x' = (F', G') \in X$ y por lo tanto $u_{x'} \in F'$, $u_{x'} \notin G'$. Por construcción $u_{x'} \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $u_{x'} \in F' \cap \mathcal{A}$, pero $u_{x'} \notin G' \cap \mathcal{A}$. Y esto es una contradicción con $F' \cap \mathcal{A} = G' \cap \mathcal{A}$. Por lo tanto $\kappa \leq |S(\mathcal{B})|$.
La desigualdad $|S(\mathcal{B})| \leq 2^{\kappa}$ es inmediata ya que un ultrafiltro en $\mathcal{B}$ es en particular un subconjunto de $\mathcal{B}$. ☑

Observación 3.1. Las anteriores cotas no son estrictas. Por ejemplo: Si $\mathbb{F}(X)$ es el álgebra booleana de los finitos-cofinitos en X con X infinito, entonces $|\mathbb{F}(X)| = |S(\mathbb{F}(X))|$ Si $\mathbb{P}(X)$ es el álgebra booleana de partes de X, con X infinito, entonces un célebre resultado de Tarski (ver [BS, Ch. 6 §1, Th. 1.5]) establece que $|S(\mathbb{P}(X))| = 2^{|\mathbb{P}(X)|}$.

3.2. Álgebras booleanas super-magras

En esta sección introducimos la principal herramienta para estudiar el contenido booleano y topológico del teorema de Morley. Particularmente la noción de álgebra booleana super-magra, noción que permitirá controlar el tamaño de los espacios de Stone.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{B}$ una álgebra booleana infinita. Diremos que $\mathcal{B}$ es magra si $|\mathcal{B}| = |S(\mathcal{B})|$.

Lema 3.2. Sea $\mathcal{B}$ una álgebra booleana infinita; $\varphi : \mathcal{B} \to C(S(\mathcal{B}))$ el isomorfismo dado por el teorema de representación de Stone; $x \in \mathcal{B}$ tal que $|\varphi(x)| > |\mathcal{B}|$. Entonces existen $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ tales que $\alpha \wedge \beta = \mathbf{0}$, $\alpha \vee \beta = \mathbf{0}$, $\alpha \vee \beta = x$ y $|\varphi(\alpha)| > |\mathcal{B}|$, $|\varphi(\beta)| > |\mathcal{B}|$.

Demostracin: Demostremos en realidad que existe y $\in \mathcal{B}$ tal que $|\varphi(x \wedge y)| > |\mathcal{B}|$, $|\varphi(x \wedge y^*)| > |\mathcal{B}|$ y con ello $\alpha = x \wedge y$, $\beta = x \wedge y^*$. Dados $U \in S(\mathcal{B})$ y $y \in \mathcal{B}$ diremos que y es U admisible si $U \in \varphi(x \wedge y)$ y $|\varphi(x \wedge y)| \leq |\mathcal{B}|$.Sea $\Gamma = \{U \in S(\mathcal{B}) : \exists y \in \mathcal{B}$ tal que y es U-admisible$\}$, $A = \{y \in \mathcal{B} : \exists U \in S(\mathcal{B})$ tal que y es U-admisible $\} \subseteq \mathcal{B}$.Notemos que si $U \in \Gamma$, entonces existe y $\in A$ tal que $U \in \varphi(x \wedge y)$ por lo tanto:

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{a \in A} \varphi(x \wedge a)$$

de lo cual se sigue

$$|\Gamma| \leq |A| \sup_{a \in A} |\varphi(x \wedge a)| \leq |\mathcal{B}| \cdot |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}| < |\varphi(x)|$$

por lo tanto sean $F, G \in \varphi(x) \backslash \Gamma$, $F \neq G$. Sea $y \in \mathcal{B}$ tal que $y \in F$, $y^* \in G$. Entonces$|\varphi(x \wedge y)| > |\mathcal{B}|$, $|\varphi(x \wedge y^*)| > |\mathcal{B}|$ ya que de lo contrario y es F-admisible o y^* es G- admisible y por lo tanto F o G estarían en Γ. ☑

Definición 3.2. Sea $\mathcal{B}$ una álgebra booleana. Decimos que $\mathcal{B}$ es **super-magra** si todas las subálgebras de $\mathcal{B}$ son magras.

Presentamos ahora una caracterización de las álgebras booleanas super-magras.

Teorema 3.2. Sea $\mathcal{C}$ álgebra booleana infinita. Entonces $\mathcal{C}$ es super-magra si y solamente si todas sus subálgebras enumerables son magras.

Demostración: ("$\Leftarrow$") Probaremos la contrarrecíproca. Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B}$ no es magra. Entonces$|S(\mathcal{B})| > |\mathcal{B}|$,o de otra forma: $|\varphi(\mathbf{1})| > |$. Por el lema anterior podemos definir inductivamente para cada $k \in \omega$, $f \in 2^k$ un punto $X_{f(0)\ldots f(k-1)} \in \mathcal{B}$ tal que:

1. $\left|\varphi\left(X_{f(0)\ldots f(k-1)}\right)\right| > |\mathcal{B}|$
2. $X_0 \vee X_1 = \mathbf{1}$, $X_0 \wedge X_1 = \mathbf{0}$ y en general:
   a) $X_{f(0)\ldots f(k-1)0} \wedge X_{f(0)\ldots f(k-1)1} = \mathbf{0}$
   b) $X_{f(0)\ldots f(k-1)0} \vee X_{f(0)\ldots f(k-1)1} = X_{f(0)\ldots f(k-1)}$

Sea Ak = $\{X_f : f \in 2^k\}$, $A_\infty = \bigcup A_k$.
Es claro que$|A_\infty| = \aleph_0$ y por lo tanto si $\Sigma = \langle A_\infty \rangle$ entonces $|\Sigma| = \aleph_0$.

Cada rama del anterior árbol binario tiene la p.i.f y por lo tanto puede extenderse a un ultrafiltro en Σ. Ahora, si $f, g \in 2^\omega$ son tales que $f \neq g$, entonces existe un menor $i \in \omega$ tal que $g(i) \neq f(i)$.
Es así como $X_{f(0)\ldots f(i)} \wedge X_{f(0)\ldots f(i)} = \mathbf{0}$ y por lo tanto los ultrafiltros asociados a f y g son distintos ya que de lo contrario 0 pertenecería a ellos.
Es así como Es así como $|S(\Sigma)| \geq 2^{\aleph_0}$, y de hecho $|S(\Sigma)| = 2^{\aleph_0}$ ya que por el lema 3.1.1 $|S(\Sigma)| \leq 2^{|\Sigma|} = 2^{\aleph_0}$.
Luego Σ es una subálgebra enumerable de $\mathcal{B}$ (y por lo tanto de $\mathcal{C}$) no magra.
("$\Rightarrow$") Esta dirección es clara. ☑

Corolario 3.1. No existe álgebra booleana $\mathcal{B}$ enumerable tal que

$$\aleph_0 < |S(\mathcal{B})| < 2^{\aleph_0}$$

Demostración: Se demostrará en realidad que si $\mathcal{B}$ es un álgebra booleana enumerable y $|S(\mathcal{B})| < 2^{\aleph_0}$, entonces $|S(\mathcal{B})| = \aleph_0$, y con ello el tamaño del espacio de Stone es enumerable o es el máximo posible.
Supongamos por contradicción que $|\mathcal{B}| = \aleph_0$ y $|S(\mathcal{B})| > \aleph_0$, es decir: $\mathcal{B}$ no es magra. Entonces por la prueba del teorema anterior existe $\mathcal{A}$ subálgebra enumerable de $\mathcal{B}$ tal que $|S(\mathcal{A})| = 2^{\aleph_0}$. Ya que la inclusión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es un homomorfismo inyectivo entonces

$$f : S(\mathcal{B}) \to S(\mathcal{A})$$
$$U \mapsto U \cap \mathcal{A}$$

es continua y sobreyectiva (ver [BM, CH. 4, § 6, Th 6.4]). Por lo tanto $|S(\mathcal{B})| \geq |S(\mathcal{A})| = 2^{\aleph_0}$. Y esto último contradice que $|S(\mathcal{B})| < 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto $|S(\mathcal{B})| = \aleph_0$.

Presentamos ahora otra caracterización de las álgebras booleanas super-magras.

Teorema 3.3. Sea $\mathcal{B}$ una álgebra booleana. $\mathcal{B}$ es super-magra si y solamente si no existe árbol binario $(x_s : s \in {}^{<\omega}2)$, $x_s \neq \mathbf{0}$ contenido en $\mathcal{B}$ tal que $x_{s^\frown 0} \wedge x_{s^\frown 1} = \mathbf{0}$ y $x_{s^\frown 0} \vee x_{s^\frown 1} = x_s$.

Demostración: Si existe un árbol binario$(x_s : s \in {}^{<\omega}2)$, $x_s \neq \mathbf{0}$ contenido en $\mathcal{B}$ tal que $x_{s^\frown 0} \wedge x_{s^\frown 1} = \mathbf{0}$ y $x_{s^\frown 0} \vee x_{s^\frown 1} = x_s$ cada rama de dicho árbol tiene la propiedad de intersecciones finitas por construcción y por lo tanto puede extenderse a un ultrafiltro en $\Sigma = \langle\{x_s : s \in {}^{<\omega}2\}\rangle$
Ultrafiltros asociados a ramas distintas son distintos ya que $x_{s^\frown 0} \wedge x_{s^\frown 1} = \mathbf{0}$. Luego $|S(\Sigma)| > \omega$ y $|\Sigma| = \omega$. Es decir $\mathcal{B}$ no es super-magra. Recíprocamente si $\mathcal{B}$ no es

super-magra entonces existe $\Gamma \leq \mathcal{B}$ tal que $|\Gamma| = \omega$ y $|S(\Gamma)| > \omega$. Sea $\varphi : \Gamma \rightarrow C(S(\Gamma))$ isomorfismo como en el teorema de representación de Stone. Tenemos que $\varphi(\mathbf{1}) = S(\Gamma)$ y por lo tanto $|\varphi(\mathbf{1})| > |\Gamma|$. Por el lema 3.2 tenemos que existen $x_0, x_1 \in \Gamma$, $x_0, x_1 \neq \mathbf{0}$ tales que $x_0 \wedge x_1 = \mathbf{0}$, $x_0 \vee x_1 = \mathbf{1}$ y $|\varphi(x_0)| > |\Gamma|$, $|\varphi(x_1)| > |\Gamma|$.
Iterando este lema obtenemos árbol binario $(x_s \; : \; s \in {}^{<\omega}2)$, $x_s \neq \mathbf{0}$ tal que $x_{s\frown 0} \wedge x_{s\frown 1} = \mathbf{0}$ y $x_{s\frown 0} \vee x_{s\frown 1} = x_s$. ☑

4. Teoría de Modelos

La teoría de modelos se puede describir como la rama de la lógica matemática que describe las conexiones entre los lenguajes y sus interpretaciones. Los objetos que desempeñan un papel fundamental son las fórmulas de un lenguaje y las estructuras de un lenguaje.

4.1. Definiciones básicas y algunos resultados

Presentamos en esta sección algunos hechos y definiciones de la teoría de modelos. Asumimos familiaridad del lector con las definiciones de lenguaje de primer orden, fórmulas, sentencias, estructuras, modelos, satisfacción, consistencia, compacidad. Como referencia de esta sección sitamos a Chang y Keisler en Model Theory (Amsterdam: Noth Holland, 1973).

Definición 4.1. (Definiciones Básicas)

1. Una **teoría** en un lenguaje $\mathcal{L}$ es un conjunto consistente de sentencias de $\mathcal{L}$. Una teoría es **completa** si todos los modelos de la teoría satisfacen exactamente las mismas sentencias.

2. Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje y X es un conjunto, $\mathcal{L}_X$ denota el lenguaje obtenido al añadir a un nuevo símbolo de constante por cada elemento de X. Usualmente se notará de igual forma el elemento de X y su símbolo de constante. Dada una estructura $\mathfrak{A}$ y $X \subseteq A$, $\mathfrak{A}_X$ denota la expansión de $\mathfrak{A}$ a $\mathcal{L}_X$ en la cual se interpreta al símbolo de constante $a \in X$ por el elemento a.

3. Dados dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en un lenguaje $\mathcal{L}$, una función $F : A \rightarrow B$ es un isomorfismo si F es una biyección, y para todos los símbolos $S \in \mathcal{L}$ se tiene que $F\left(S^{\mathfrak{A}}\right) = S^{\mathfrak{B}}$.

4. **La teoría completa** de un modelo $\mathfrak{A}$ es el conjunto $Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \text{Sentencias}(\mathcal{L}) \; : \; \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

5. Dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes, $denotado$ $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, si $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$.

6. Dados dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en un lenguaje $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ es submodelo de $\mathfrak{B}$, denotado $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, si:

$S_1.$ $A \subseteq B$
$S_2.$ $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ para todo símbolo de constante c en $\mathcal{L}$.
$S_3.$ $F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}} \restriction A^n$ para todo símbolo de función F n-ádico en $\mathcal{L}$.
$S_4.$ $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$ para todo símbolo de relación R n-ádico en $\mathcal{L}$.

7. Dados dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en un lenguaje $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ es **submodelo elemental** de $\mathfrak{B}$, denotado $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, si:

$SE_1.$ $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$
$SE_2.$ *Para toda fórmula* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* $\mathcal{L}$, *y* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$,
$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Esta última noción trata de capturar "todas" las propiedades de primer orden y no simplemente las propiedades atómicas de un estructura. Por ejemplo: Si $\mathbb{Q}$, $\bar{\mathbb{Q}}$ denota el campo de los racionales y el de los algebraicos respectivamente, tenemos que $\mathbb{Q} \subseteq \bar{\mathbb{Q}}$, pero $\mathbb{Q} \npreceq \bar{\mathbb{Q}}$, ya que -1 tiene raíz cuadrada en $\bar{\mathbb{Q}}$, pero no en $\mathbb{Q}$.

Observación 4.1.

$$\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \;\; si \;y\; solamente \;si\; \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \;\; y \;\; \mathfrak{A}_A \equiv \mathfrak{B}_A.$$

El siguiente teorema indica cuando un submodelo puede no ser submodelo elemental: la falta de testigos para los cuantificadores existenciales.

Teorema 4.1. (TEST DE TARSKI-VAUGHT) Dados dos modelos $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en un lenguaje $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ si y solamente si:

1. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

2. Para todas las fórmulas $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}^{n+1}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en A, si $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi(a, a_1, \ldots, a_n)$.

Los siguientes teoremas permiten construir modelos con algún tamaño específico. Esta versatilidad muestra algunas de las limitaciones de expresión de la lógica de primer orden.

Teorema 4.2. (TEOREMA DE LOWENHEIM-SKOLEM) Una teoría T en un lenguaje $\mathcal{L}$ que tiene modelos infinitos tiene modelos en cada cardinal $\kappa \geq |\mathcal{L}| + \omega$.

Teorema 4.3. (Teorema descendente de Lowenheim-Skolem-Tarski) Sea $\mathfrak{A}$ un modelo de tipo $\mathcal{L}$ de tamaño α, y $|\mathcal{L}| + \omega \leq \beta \leq \alpha$. Dado $X \subseteq A$, $|X| \leq \beta$, existe $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{A}$ tal que $X \subseteq C$ y $|C| = \beta$.

4.2. Saturación y Tipos

Sea T una teoría consistente en un lenguaje $\mathcal{L}$. Diremos que un conjunto de fórmulas $\Sigma(x) \subseteq \mathcal{L}^1$ es **consistente con** T si $T \cup \Sigma(x)$ es consistente. Un n-tipo parcial de T es un conjunto $\Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathcal{L}^n$ consistente con T. Un n-tipo **completo** de T es un conjunto $\Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subseteq \mathcal{L}^n$ consistente con T y que es maximal respecto a la anterior propiedad. El espacio de tipos de T. es el conjunto

$$S_n(T) = \{p \,:\, p \text{ es un } n\text{-tipo completo de } T\}$$

Sea $\mathfrak{D} \models T$ y $p \in S_n(T)$. Una realización de $p \in S_n(T)$ es una tupla $\bar{a} \in D^n$ tal que $\mathfrak{D} \models p(\bar{a})$.
Para cada n-tupla $\bar{a}$ en un modelo $\mathfrak{D}$ de T el conjunto

$$tp^{\mathfrak{D}}(\bar{a}) = \{\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}^n \,:\, \mathfrak{D} \models \varphi(\bar{a})\}$$

es un n-tipo completo de T el cual es llamado tipo de $\bar{a}$ en $\mathfrak{D}$.Por el Teorema de Compacidad se puede demostrar que todos los tipos son de esta forma; es decir:

$$S_n(T) = \{tp^{\mathfrak{D}}(\bar{a}) \,:\, \bar{a} \in D^n \text{ para algún } \mathfrak{D} \models T\}$$

Enunciamos a continuacón algunos resultados básicos sobre la realización de tipos.
Lema 4.1. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura infinita, $y\ Y \subseteq A$.

1. *Si* $p \in S_n(Th(\mathfrak{A}_Y))$, entonces existe $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ tal que p es realizado en $\mathfrak{B}_Y$ $y\ |B| = |A|$.
2. *Existe* $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$, $|B| \leq |A| \cdot 2^{\max(\omega, |Y|)}$, tal que todo $p \in S_n(Th(\mathfrak{A}_Y))$ es realizado en $\mathfrak{B}$.

Demostración: Ver [S, Prop 15.1]. ☑

Definición 4.2. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura, $y\ Y \subseteq A$. $\mathfrak{A}$ es **saturado sobre** Y, si todo $p \in S_1(Th(\mathfrak{A}_Y))$ es realizado en $\mathfrak{A}_Y$. Supongamos κ es un cardinal infinito $\mathfrak{A}$ es κ**-saturado** si $\mathfrak{A}$ es saturado sobre todo $Y \subseteq A$ tal que $|Y| < \kappa$. $\mathfrak{A}$ es **saturado** si $\mathfrak{A}$ *es* $|A|$-saturado.
Ejemplos:

1. Toda estructura finita es ω-saturada.
2. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ es saturado.
3. $\mathbb{C}$ (números complejos vistos como cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0) es saturado.

Las estructuras saturadas no son muy comunes. Muchos de los resultados de existencia de estructuras saturadas usan hipótesis conjuntistas (frecuentemente CH, GCH o existencia de inaccesibles) que pueden generar dificultades. Concluimos esta sección con el siguiente resultado positivo en la anterior dirección:

Teorema 4.4. Sea $\mathfrak{A}$ una estructura infinita. Para cada cardinal infinito κ existe una estructura κ^+-saturada $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{A}$ tal que $|B| \leq |A|^\kappa$.

Demostración: Ver [S, Th 16.4]. ☑

4.3. Álgebra de Lindenbaum

Sea T una teoría consistente en un lenguaje $\mathcal{L}$. En esta sección mostraremos que T da lugar a varias álgebras booleanas que pueden ser usadas para investigar la propiedades modelo-teóricas de T. Como referencia a esta sección se tiene [BM, Ch. 5 §5]. Definimos una relación $\cong$ en $\mathcal{L}^n$ de la siguiente manera:

$$\varphi \cong \psi \Longleftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Se tiene entonces que $\cong$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^n$. Sea $B_n(T) = \mathcal{L}^n/_{\cong}$ Se tiene entonces que $B_n(T)$ es una álgebra booleana. Las operaciones booleanas en $B_n(T)$ están dadas por:

$$\begin{array}{rcl} [\varphi]_{\cong} \wedge [\psi]_{\cong} & = & [\varphi \wedge \psi]_{\cong} \\ [\psi]^*_{\cong} & = & [\neg\psi]_{\cong} \end{array}$$

De ahora en adelante al álgebra booleana $B_n(T)$ se le llamará álgebra de Lindenbaum de T.

4.4. Ultrafiltros de $B_n(T)$ y tipos de T

Sea T una teoría completa y sea $\varphi \in \mathcal{L}^n$. Definimos $\|\varphi\|$ como el conjunto $\{p \in S_n(T) : \varphi \in p\}$.
El siguiente resultado, que se enuncia sin demostración, le da una topología muy agradable a $S_n(T)$.

Teorema 4.5. $\{\|\varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}^n\}$ es una base para una topología en $S_n(T)$. Con esta topología $S_n(T)$ es un espacio booleano.

Por el teorema de representación de Stone, se tiene que $S_n(T)$ es homeomorfo al espacio de Stone de una álgebra booleana. En este caso dicha álgebra booleana es $B_n(T)$. Esto se debe al siguiente hecho:

$$\varphi \cong \psi \Longleftrightarrow \|\varphi\| = \|\psi\|$$

De esto se concluye que $B_n(T)$ y el álgebra característica de $S_n(T)$ son isomorfas y por lo tanto se tiene:

Teorema 4.6. Sea

$$\begin{array}{rcl} F : S_n(T) & \to & S(B_n(T)) \\ p & \mapsto & \{[\varphi]_{\cong} : \varphi \in p\} \end{array}$$

Entonces F es un homeomorfismo.

Este último hecho permite identificar de forma natural tipos con ultrafiltros. El siguiente lema se usarará en el último capítulo. La demostración puede encontrarse en [BM].
Lema 4.2. Sea T una teoría completa y U ultrafiltro de $B_n(T)$. Entonces $\{\varphi : [\varphi]_{\cong} \in U\}$ es un conjunto de fórmulas maximal consistente con T.

5. Conexiones

En esta sección se introduce la noción modelo-teórica de teoría κ-estable. El resultado principal es el teorema 5.1, el cual relaciona la noción de algebra super-magra y de ω-estabilidad de una teoría.
Haciendo uso de este último teorema se pueden simplificar considerablemente muchos aspectos del teorema de Morley.

5.1. Teorías κ-estables.

Comenzamos con una definición. De ahora en adelante T es una teoría enumerable con modelos infinitos.

Definición 5.1. (Morley). Sea T una teoría. T es κ-estable si $|S_1(Th(\mathfrak{A}_A))| = \kappa$ cuando $\mathfrak{A}$ es un modelo de T de cardinalidad κ.
El siguiente lema es un resultado técnico, necesario para generalizar el teorema 5.1 a todas las álgebras de Lindenbaum.

Lema 5.1. Sea T una teoría κ-estable. Entonces para todo $\mathfrak{A} \models T$ y $n < \omega$ si $|\mathfrak{A}| = \kappa$ entonces $|S_n(Th(\mathfrak{A}_A))| = \kappa$.

Demostración: Por inducción: Sea $\mathfrak{A} \models T$ tal que $|\mathfrak{A}| = \kappa$. Para $n = 1$ no hay nada que demostrar. Supongamos $n > 1$ y sea $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B}$ realiza todos los tipos de $S_{n+1}(\mathfrak{A}) = S_{n+1}(Th(\mathfrak{A}_A))$ (Ver el lema 4.1). Supongamos por contradicción que $|S_{n+1}(\mathfrak{A})| \neq \kappa$. Hay dos casos:

Caso 1. $|S_{n+1}(\mathfrak{A})| < \kappa$.
En este caso, ya que $|S_n(\mathfrak{A})| < |S_{n+1}(\mathfrak{A})|$ tenemos que $|S_n(\mathfrak{A})| < \kappa$, lo cual contradice la hipótesis de inducción.

Caso 2. $|S_{n+1}(\mathfrak{A})| > \kappa$.
Para cada $q \in S_{n+1}(\mathfrak{A})$, sea $\bar{a_p}$, b_p en B^n, B respectivamente tales que
Consideremos para cada $q \in S_{n+1}(\mathfrak{A})$, $tp(q) = \{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathcal{L}_A : \mathfrak{B}_A \models \varphi(\bar{a_p})\}$.
Se sigue que para cada $q \in S_{n+1}(\mathfrak{A})$, $tp(q) \in S_n(Th(\mathfrak{B}_A)) = S_n(Th(\mathfrak{A}_A))$ (Esta última igualdad ya que $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ y por lo tanto $Th(\mathfrak{B}_A) = Th(\mathfrak{A}_A)$). Tenemos entonces que $\Gamma = \{tp(q) : q \in S_{n+1}(\mathfrak{A})\} \subseteq S_n(\mathfrak{A})$ Luego, si $|\Gamma| > \kappa$ entonces $|S_n(\mathfrak{A})|$ esto último contradice la hipótesis de inducción. Luego $|\Gamma| \leq \kappa$.

Ya que κ^+ es regular y $|S_{n+1}(\mathfrak{A})| \geq \kappa^+$, existe, $\Omega \subseteq S_{n+1}(\mathfrak{A})$, $|\Omega| = k^+$ tal que todos los tipos $tp(q)$, $q \in \Omega$ son iguales[2]. Sea $p \in \Omega$ fijo, y para cada $q \in \Omega$ sea $\Delta_q = \{\varphi(\bar{a_p}, x_n) \in \mathcal{L}_{A \cup \{\bar{a_p}\}} : \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in q\}$. Tenemos entonces que $\{\Delta_q : q \in \Omega\}$

1Este lema es válido en cualquier álgebra con operaciones finitarias.

es una colección de tipos distintos sobre $Th(\mathfrak{B}_{A\cup\{\bar{a_p}\}})$. Luego $|S_1(Th(\mathfrak{B}_{A\cup\{\bar{a_p}\}}))| \geq \kappa^+$.

Ya que $|A \cup \{\bar{a_p}\}| = \kappa$ y $|B| \geq \kappa$, por el teorema descendente de Lowenheim-Skolem-Tarski, existe $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{B}$ tal que $|C| = \kappa$ y $A \cup \{\bar{a_p}\} \subseteq C$. Notemos ahora que $Th(\mathfrak{C}_C) = Th(\mathfrak{B}_C) \supseteq Th(\mathfrak{B}_{A\cup\{\bar{a_p}\}})$ y por lo tanto $|S_1(Th(\mathfrak{B}_{A\cup\{\bar{a_p}\}}))| \leq |S_1(\mathfrak{C})|$. Ya que T es ω-estable y $|C| = \kappa$ entonce $|S_1(\mathfrak{C})| = \kappa$. Tenemos entonces que:

$$\kappa^+ \leq |S_1(Th(\mathfrak{B}_{A\cup\{\bar{a_p}\}}))| \leq \kappa$$

lo cual es una contradicción. Esto concluye la demostración. ☑

5.2. Teorías ω-estables y álgebras super-magras

Presentamos en esta sección la principal aplicabilidad de las álgebras super-magras a la teoría de modelos. Usando argumentos desarrollados en anteriores secciones, presentamos una prueba de un primer resultado (teorema 5.1) debido a Morley en su célebre prueba de la conjetura de Łoś [M65].

Teorema 5.1. Sea T una teoría. T es *ω-estable* si y solo si para todo $\mathfrak{A} \models T$, $n < \omega$ el álgebra $B_n(Th(\mathfrak{A}_A))$ es super-magra.

Demostración: (“$\Rightarrow$”)Por contradicción. Supongamos T es ω-estable y para algún $n < \omega$, $B_n(Th(\mathfrak{A}_A))$ no es super-magra. Por el teorema 3.3 existe árbol binario $([\psi_s]_{\cong} : s \in {}^{<\omega}2)$ tal que $[\psi_{s\frown 0}]_{\cong} \wedge [\psi_{s\frown 1}]_{\cong} = \mathbf{0}$ y $[\psi_{s\frown 0}]_{\cong} \vee [\psi_{s\frown 1}]_{\cong} = [\psi_s]_{\cong}$. Consideremos ahora el árbol $(\psi_s : s \in {}^{<\omega}2)$. Sea X el conjunto de parámetros de $\mathfrak{A}$ nombrados en alguna fórmula del anterior árbol. Es claro que $|X| = \omega$. Por el teorema descendente de Lowenheim-Skolem-Tarski, existe $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$ tal que $|B| = \omega$ y $X \subseteq B$. Tenemos luego que $\mathfrak{B} \models T$.

Mostremos ahora que $|S_n(Th(\mathfrak{B}_B))| > \omega$ con lo cual se llega a una contradicción, ya que por el teorema anterior, al ser T ω-estable, tenemos que $|S_n(Th(\mathfrak{B}_B))| = \omega$. Veamos primero que cada rama del árbol $(\psi_s : s \in {}^{<\omega}2)$ es consistente con $Th(\mathfrak{B}_B)$. Para ello tomemos un subconjunto finito Δ de una rama. Por construcción $\bigwedge_{\psi\in\Delta} [\psi]_{\cong} \neq \mathbf{0}$. Luego $\left[\bigwedge_{\psi\in\Delta} \psi\right]_{\cong} \neq 0$. Es decir: $Th(\mathfrak{A}_A) \nvdash \neg \bigwedge_{\psi\in\Delta} \psi$. Ya que $Th(\mathfrak{B}_B) \subseteq Th(\mathfrak{A}_A)$ tenemos que $Th(\mathfrak{B}_B) \nvdash \neg \bigwedge_{\psi\in\Delta} \psi$. Luego $Th(\mathfrak{B}_B) \cup \left\{\bigwedge_{\psi\in\Delta} \psi\right\}$ es consistente. Por compacidad cada rama del anterior árbol es consistente con $Th(\mathfrak{B}_B)$ y por lo tanto se puede extender a $p \in S_n(Th(\mathfrak{B}_B))$. Ya que $[\psi_{s\frown 0}]_{\cong} \wedge [\psi_{s\frown 1}]_{\cong} = \mathbf{0}$ entonces tipos asociados a ramas distintas son distintos. Se sigue que $|S_n(Th(\mathfrak{B}_B))| \geq 2^{\omega} > \omega$.

(“$\Leftarrow$”) Supongamos que existe $\mathfrak{B} \models T$ tal que $|B| = \omega$ y $|S_1(Th(\mathfrak{B}_B))| > \omega$. Tenemos que |Sentencias $(\mathcal{L}_B)| = |\mathcal{L}| + |B| + \omega = \omega$. Luego $|Th(\mathfrak{B}_B)| = \omega$. Se sigue que $|B_1(Th(\mathfrak{B}_B))| \leq \omega$ y de hecho $|B_1(Th(\mathfrak{B}_B))| = \omega$ ya que de lo contrario si $|B_1(Th(\mathfrak{B}_B))| < \omega$ entonces $|S(B_1(Th(\mathfrak{B}_B)))| < \omega$ (Una álgebra booleana finita tiene finitos ultrafiltros); pero esto contradice que $|S(B_1(Th(\mathfrak{B}_B)))| = |S_1(Th(\mathfrak{B}_B))| > \omega$. Luego $B_1(Th(\mathfrak{B}_B))$ es una álgebra booleana enumerable con espacio de Stone no enumerable. Luego $B_1(Th(\mathfrak{B}_B))$ no es super-magra. Esto concluye la demostración. ☑

Corolario 5.1. (MORLEY). Sea T una teoría. Si T es ω-estable entonces T es κ-estable para todo $\kappa \geq \omega$.

Demostración: Supongamos T no es κ-estable en algún $\kappa \geq \omega$. Sea $\mathfrak{A} \models T$ tal que $|\mathfrak{A}| = \kappa$ y $|S_1(Th(\mathfrak{A}_A))| > \kappa$. Tenemos que $|B_1(Th(\mathfrak{A}_A))| = \kappa$ y $|S(B_1(Th(\mathfrak{A}_A)))| > \kappa$. Luego $B_1(Th(\mathfrak{A}_A))$ no es super-magra. Por el teorema anterior T no es ω-estable. ☑

2Este último hecho podría llamarse con todo derecho un “principio de casillas” generalizado.

BIBLIOGRAFIA

•[BM] J. L. Bell, M. Machover A course in Mathematical Logic. North-Holland, Amsterdam, 1977.
• [BS] J. L. Bell, A. B. Slomson. Models and Ultraproducts, North-Holland, Amsterdam, 1971.
• [B] S. Buechler. Essential Stability Theory. Springer-Verlag, New York, 1996.
• [C] E. Casanovas. Teor´ıa de Modelos. Preprint, 2000.
• [CK] C. C. Chang, H. J. Keisler. Model Theory. North-Holland, Amsterdam, 1973.
• [K78] J. Knight. Prime and Atomic Models. The Journal of Symbolic Logic, Vol 43, Num 3, 385-393.
• [M65] M. Morley. Categoricity in Power. Trans. Amer. Math. Soc, 114, 514-538, 1965.
• [S] G. Sacks. Saturated Model Theory. W. A. Benjamin, Inc. Reading, Massachusetts, 1972.
• [St36] M.H. Stone. The theory of representation for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc, 40, 37-111.
• [St37] M.H. Stone. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc, 41, 375-381.