

Capítulo 8

La gamificación para promover el trabajo colaborativo y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de primer semestre



Autora

Diana Carolina Hincapié Torres¹

¹ Magíster en Didáctica de las matemáticas de la Universidad del Atlántico, Especialista en Matemática aplicada de la Universidad Sergio Arboleda, Ingeniera industrial del Politécnico Grancolombiano. Es programadora y desarrolla contenidos en ambientes académicos a través de herramientas de gamificación y otras metodologías para el desarrollo de conceptos matemáticos. Asesora en la selección de instrumentos para gestionar los procesos de enseñanza en las matemáticas.
Correspondencia: dchincapie@poligran.edu.co

Resumen

Este capítulo aborda la creación de un aplicativo multimedia que fomenta en los estudiantes de primer semestre de la modalidad virtual un aprendizaje significativo de las matemáticas, a través de una gamificación centrada en una carrera de búsqueda hacia un lugar escondido. El estudiante, junto con su equipo de trabajo, resuelve una serie de pistas, cada una de ellas está acompañada de una coordenada, por eso al finalizar el recorrido o resolver todas las pistas adecuadamente pueden acceder al lugar secreto. El recorrido está enmarcado en tres misiones, cada una con una serie de pistas que encierra una tarea para obtener la coordenada. Durante la gamificación, el estudiante debe trabajar actividades de cuadrados mágicos, calcular distancias entre puntos, jugar con emuladores para encontrar áreas de figuras. En el proceso son guiados por Alice, un avatar que les da las instrucciones e indicaciones para recorrer cada escenario. El proyecto se deriva de una experiencia anterior desarrollada por la autora; las dos experiencias permiten reconocer las fortalezas de la gamificación en el aprendizaje de las matemáticas, asimismo, vislumbran una transformación en las prácticas de enseñanza a través de la narrativa digital.

Palabras clave: aprendizaje activo, habilidades matemáticas, pensamiento lógico, gamificación.

Introducción

Esta experiencia de aprendizaje surge de la necesidad de innovar las actividades que los estudiantes realizan en el trabajo colaborativo en el curso de matemáticas, y se realiza durante tres semanas de las ocho que dura el curso. Además de ser el trabajo colaborativo, se le han incorporado diversas técnicas didácticas cuyo propósito primordial es aprender las matemáticas como una aplicación en la vida real, y que se transformen en un elemento que mejora la calidad de vida. En el ámbito institucional, dicha aplicación sirve para apoyar y/o sumar al progreso del conocimiento, así movilizar todos los saberes y desarrollar competencias en los actores de la educación (Cerdas et al., 2020).

Por su parte, el trabajo colaborativo, según Chávez (2017), se puede interpretar como una herramienta mediadora de la interacción social, promoviendo el desarrollo de la interacción entre compañeros de manera inclusiva, permitiéndoles minimizar la exclusión y la falta de seguridad. Tratándose de una asignatura como matemáticas, y que el trabajo colaborativo parte de la idea del autoestudio como temas complementarios al núcleo temático de la asignatura, es importante que el estudiante investigue y asimile estos conceptos, por tanto, es clave fomentar el uso de herramientas

tecnológicas, como el uso de *software* de cálculo simbólico y calculadoras gráficas, los cuales facilitan la comprensión de los conceptos. Además de esto, la interacción social puede mejorar la motivación y el compromiso de los estudiantes.

De acuerdo con el boletín estadístico del Politécnico Grancolombiano, la caracterización de los estudiantes que ingresaron en el periodo 2024-1 de la modalidad virtual, se tiene que el 71,46% de los estudiantes tienen como ciudad de residencia a Bogotá, el 13,93% Medellín, Cali con el 5,91%, Soacha y Bello con el 4,85% y 3,86% respectivamente, concentrando así los mayores puntos de CSU (Centros de Servicio Universitario), con lo cual se puede inferir que se tiene una gran cobertura de estudiantes a nivel nacional. Por lo tanto, el trabajo colaborativo en la modalidad virtual requiere que la participación de los estudiantes se desarrolle colaborativamente, pero de forma asincrónica dadas las diferencias en el ingreso a las plataformas que presentan algunos estudiantes de la modalidad, también aprovechando las posibilidades de extender la clase que permite la virtualidad.

Uno de los retos es vencer el “ausente presente”, es decir, el estudiante que está en el curso, pero no participa de las actividades. La primera estrategia fue, entonces, que la experiencia fuera colaborativa para lograr la cohesión y coacción grupal. La segunda fue motivar la participación de los estudiantes en las actividades; en ese instante aparece un enfoque gamificado, que consiste en utilizar elementos y mecánicas propias de los juegos en contextos educativos y, según varios estudios, ayuda a mejorar la motivación, el compromiso y el aprendizaje de los estudiantes (Kalogiannakis et al., 2021; Nousiainen et al., 2018; Rahman et al., 2022).

Al tratarse de un desafío de pistas, los estudiantes trabajan de forma colaborativa resolviendo cada una de las pistas, la cual contiene una o varias actividades; estos dialogan y se retroalimentan entre sí, por medio de los aportes dentro del foro llegan a acuerdos para resolver cada uno de los retos y encontrar al final la ubicación real, obedeciendo a los criterios de búsqueda de las coordenadas geográficas de navegación en Google *maps*. La gamificación se diseñó de tal manera que en cada cohorte se efectúan variaciones de las ubicaciones sin afectar las actividades, lo que permite que los estudiantes viajen a un número considerable de ubicaciones, con esto se pretende resaltar sitios turísticos e históricos representativos de diferentes lugares del mundo y explorar la navegación a través de las coordenadas para aprender a aplicarlas.

Por lo tanto, el diseño del trabajo colaborativo para la asignatura de Matemáticas I del Politécnico Grancolombiano, transversal a todos los programas de la Institución, se desarrolló a través de la gamificación, el aprendizaje basado en tareas y el *storytelling*; dicha experiencia ha evolucionado, desde un documento plano, luego un diseño de

gamificación a través de Genially, hasta una narrativa compleja en una carrera de búsqueda que se transforma con el propósito de maximizar resultados de aprendizaje.

Marco teórico

• Problemática que atiende

El módulo o asignatura de Matemáticas I es transversal a todos los programas, debido a una apuesta institucional, por consiguiente, atiende una alta demanda de estudiantes, se enmarca en la tipología de “ciencias básicas”, se desarrolla en ocho semanas, cada una de ellas con la estrategia didáctica denominada escenarios para el aprendizaje: esta consiste en una secuencia didáctica que enlaza los contenidos con las actividades que debe desarrollar el estudiante. En los escenarios 3, 4 y 5 se realiza el trabajo colaborativo por parte de los estudiantes, se proponen una serie de actividades para que el estudiante aplique sus conocimientos, para lo cual participa en un foro grupal donde hace sus aportes y retroalimenta a sus compañeros. El trabajo colaborativo obedece a los siguientes objetivos de aprendizaje:

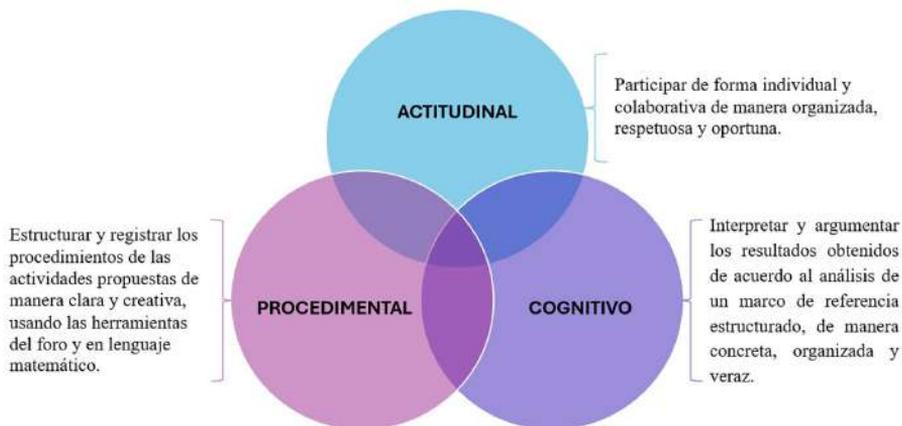


Figura 1. Objetivos de aprendizaje trabajo colaborativo Matemáticas I.

Fuente: elaboración propia.

Surgió la necesidad de crear una actividad que obedeciera a los lineamientos de la asignatura, enmarcado en los siguientes lineamientos: tiempo de duración que no sobrecargara al estudiante con sus otras responsabilidades académicas, persiguiendo los objetivos que se muestran en la figura 1, orientadas al autoestudio del estudiante y a desarrollar las competencias para trabajar de forma colaborativa.

La problemática se detectó a partir de una serie de observaciones realizadas a los estudiantes; a lo largo de diferentes cohortes se evidenció que los estudiantes subían a la web sus trabajos, y cuando se trataba de trabajos estáticos los otros compañeros los copiaban, lo que implicó innovar en las actividades volviéndolas más personales y que se pudieran cambiar cada semestre, de allí se generó pensar que los estudiantes encontrarán un sitio diferente que fuera cambiando, de tal manera que los estudiantes estarían más atentos a las indicaciones de los docentes y se concentrarían en el desarrollo de su actividad, la cual no van a encontrar resuelta en la web. Por lo tanto, surgió la necesidad de personalizar la experiencia.

• Antecedentes

Son innumerables los autores que trabajan la gamificación para el aula en matemáticas, por tal razón, se resaltan algunos de los más relevantes por su similitud con la experiencia descrita en el actual capítulo.

Pascual y Ventura-Campos (2017), en su investigación cuentan cómo crearon una gamificación que se ambienta en el salón de clase, apagan las luces del aula e indican que los estudiantes tienen un tiempo de 35 minutos para encontrar una llave; para hacerlo deben resolver enigmas que se les presentan, y cuando lo hacen reciben una letra que pertenece a un mensaje codificado. El éxito o fracaso del grupo depende de la pericia de los estudiantes a la hora de resolver los enigmas y descifrar el código, concluyendo así que la forma como los estudiantes participan promueve la cooperación, el trabajo en equipo y el desarrollo de habilidades interpersonales.

Por su parte, Solarte y Díaz (2018), en su tesis presentan la construcción de un entorno virtual de aprendizaje afectivo a través de la gamificación de las actividades, con lo cual crearon un entorno amigable que respondía a las necesidades emotivas del usuario. Describen la ruta metodológica para lograr la construcción de dicho entorno y su validación a través de un estudio de caso, con estudiantes de educación media en escuelas rurales. Señala que los estudiantes no habían tenido experiencias con medios digitales. Los resultados fueron muy satisfactorios, el 80% de los estudiantes terminó el curso, y dentro de ellos, el 59% mostró una curva ascendente en su aprendizaje.

Linares y Ruiz (2020), en su investigación titulada Búsqueda del Tesoro, se concentran en el aprendizaje activo de la física por medio de la creación de un juego de pistas; cada pista se conformó con los temas de la asignatura y se indicaba la pauta para resolverla. Cuando el estudiante encontraba el nombre o la ubicación de la estación, la cual podía ser un lugar, un maestro, un auxiliar u otro alumno ajeno al grupo iban encontrando pistas para terminar encontrando el "tesoro". Los estudiantes

encontraban un examen sin resolver, con la capacidad para aplicarse como examen parcial, es decir, si el estudiante resolvía las pistas tenía gran parte del camino allanado para resolver el examen. Los autores concluyen que involucrar al estudiante en un proceso de indagación fomenta el aprendizaje, el trabajo colaborativo, motiva al estudiante, y como docentes les contribuye a mejorar y diversificar los ambientes de aprendizaje que deben crear para los estudiantes.

Dellepiane (2024), presenta una propuesta de unidad curricular de matemática y cómo debe ser su enseñanza en profesores de educación inicial y primaria; la investigación busca dar respuesta al contexto actual, donde las habilidades de resolución de problemas contribuyen a la construcción de conocimientos matemáticos a través de dinámicas de trabajo implicando al estudiante como protagonista y al docente como mediador y facilitador del aprendizaje. La actividad consiste en un juego de escape presencial con una duración de tres horas, desarrollado en tres momentos: 1. La motivación a participar y las reglas del juego, 2. El desarrollo del juego con siete consignas o desafíos con tres ejes conceptuales: números y operaciones, geometría y medida, 3. En un espacio común se discute la experiencia que tuvo cada docente con sus estudiantes.

En la literatura académica se ha investigado ampliamente sobre el papel de la gamificación en la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, Encalada (2021) propuso la metodología bajo el diseño documental, obteniendo resultados alentadores en la motivación de los estudiantes y disminución de su estrés. Por otra parte, Gody (2020), en el desarrollo del pensamiento lógico matemático, concluye que el uso óptimo de herramientas digitales con un enfoque intercultural empleando estrategias de gamificación facilita el desarrollo del pensamiento lógico matemático (PLM) en estudiantes de educación superior.

Los antecedentes anteriores permiten inferir que la introducción de los juegos en los contenidos de las áreas curriculares facilita a los estudiantes resolver problemas, elegir rutas por la cuales les sea más sencillo llegar a una respuesta y descubrir cuáles estudiantes tienen predisposición o habilidades particulares.

• Estrategia de aprendizaje

Como se ha presentado a lo largo de este capítulo la estrategia empleada fue la gamificación, Martínez-Martínez et al. (2020), la define como una estrategia de enseñanza de donde se trasladan mecánicas de juegos a contextos educativos o sociales mediante la utilización de plataformas tecnológicas, por lo que también se considera una forma lúdica de aprender que permite adquirir las destrezas de forma dinámica, de tal manera que se provoque en los estudiantes sentimientos

de motivación por el aprendizaje, mejorar la autoestima, fomentar la creatividad y toma de decisiones. Es así que la gamificación permite a los estudiantes desarrollar sus habilidades y potenciar el proceso de enseñanza aprendizaje.

Según Deterding (2015), la gamificación es una estrategia que consiste en utilizar elementos del juego en contextos que no lo son, su función es promover el enganche y la motivación, los cuales son elementos significativos en los procesos formativos. Desde el contexto educativo, la gamificación está siendo utilizada tanto como una herramienta de aprendizaje en diferentes áreas y asignaturas, como para el desarrollo de actitudes y comportamientos colaborativos y el estudio autónomo. Area y González (2015) indican que las actividades gamificadas se ha convertido en una herramienta poderosa que permiten mejorar la didáctica.

Para que la gamificación funcione se propuso una estrategia de *storytelling* basado en Vogler (2002), donde el “héroe” o estudiante se encuentra con una situación o problema a resolver (pista), una reunión de pistas se denomina misión. La gamificación se compone de tres misiones, una para cada semana, se espera que en la última haya superado todas las pruebas y, junto con sus compañeros, en un consolidado de los aportes del equipo hay una construcción conjunta del aprendizaje. Para que la gamificación tenga una sensación de realidad, cada pista se encuentra en un lugar determinado de “ciudad futura” al que el estudiante debe acudir, allí encontrará a personajes o avatares que le darán las indicaciones y un botón con las instrucciones de lo que debe hacer con ese resultado, de esa manera encuentran la coordenada del lugar que van a visitar. La narrativa incita a los estudiantes a resolver la pista y a medida que avanzan muestra cada uno de los lugares que ha visitado para que el estudiante tenga la sensación de recorrido y sienta un cambio al finalizar la experiencia.

Cada pista plantea una situación didáctica que el estudiante debe resolver, para hablar de la teoría de Brousseau. Es importante definir que una situación didáctica es el conjunto de relaciones que se establecen de manera implícita o explícita entre un grupo de alumnos, un entorno o medio (que puede incluir materiales o instrumentos) y el profesor, con el fin de que los alumnos aprendan, es decir que reconstruyan un conocimiento (Gómez, 2010). Brousseau se refiere a “situación didáctica” como aquella que ha sido construida intencionalmente por el docente, con la finalidad de ayudar a su estudiante a adquirir un conocimiento determinado. La situación relaciona y permite que el estudiante interactúe con el problema propuesto, pues en su rol activo discute con sus compañeros la forma de resolverlo. Según Montagud (2020), dichas situaciones se clasifican: de acción, de formulación y de validación. Ver figura 2.

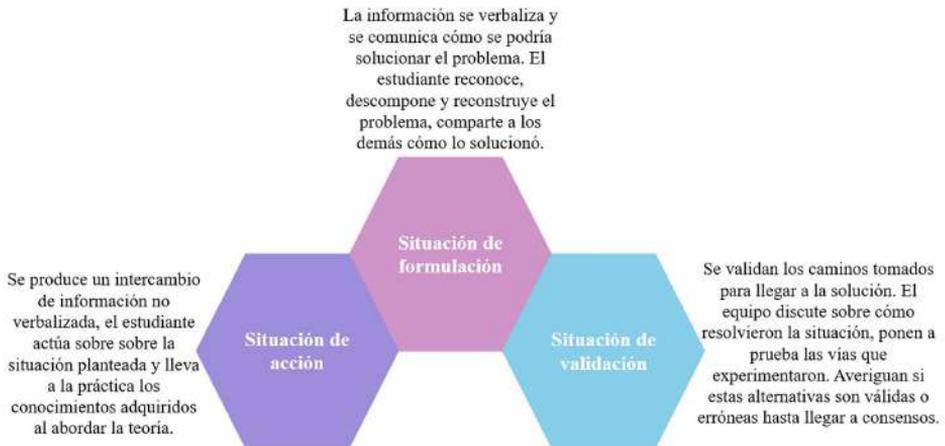


Figura 2. Clasificación de las situaciones didácticas.

Fuente: elaboración propia.

En el diseño planteado, el estudiante debe pasar por la formulación, la acción y la validación. Para iniciar la acción, el estudiante ingresa al interactivo y allí la secuencia lo lleva a cada una de las misiones, la aborda de manera individual y la resuelve. Posteriormente, en el foro socializa sus soluciones con sus compañeros, al mismo tiempo, retroalimenta las que los otros proponen. Por último, entre todos realizan la validación en un compilado final que deben remitir al docente.

Cada una de las misiones está compuesta por una serie de pistas diseñadas por el docente. Estas pistas en realidad son tareas que debe resolver el estudiante. Contijoch (2014) plantea que la noción de la 'tarea' obedece a una unidad de la planeación y la enseñanza, y la considera como una actividad en la que se involucra un individuo para alcanzar un objetivo, por lo tanto, las actividades que son posibles en la vida real se consideran también como tareas. La autora propone que en el aprendizaje basado en tareas la labor fundamental del docente es que los estudiantes realicen las tareas, por eso es recomendable para el trabajo colaborativo. Para lograr este propósito, el docente requiere de cuatro categorías de actuación: 1. Orientación: con el fin de distribuir la información necesaria para que los estudiantes logren realizar la tarea. 2. Organización: llevar a que los estudiantes coordinen sus acciones para realizar la tarea, no es solo la distribución, es que cada uno realice las actividades, las discutan y tomen decisiones. 3. Adaptación: lograr que los miembros del equipo adapten sus acciones unos con otros. 4. Motivación: llevarlos como equipo a alcanzar los objetivos y completar la tarea.

Durante el proceso o situación de juego cada estudiante de manera individual debe completar las pistas de cada una de las tres misiones, luego en un foro discute con sus compañeros y por último entregan el consolidado. La idea es que puedan descubrir el sitio donde todos van a viajar y coincidan las coordenadas con el sitio que dispuso el docente, dicho sitio lo buscan por medio de *Google Maps* digitando las coordenadas obtenidas. Una coordenada se compone de un par de valores de referencia, cada uno determinado por un eje imaginario y expresado en un conjunto de números, letras y signos. Normalmente, estos últimos consisten en grados sexagesimales, es decir, grados de una circunferencia, ya que así permiten representar matemáticamente la forma esferoidal del planeta (Concepto, s.f.). Es importante tener presente que la latitud se determina a partir del ecuador terrestre y los paralelos que le siguen hacia el norte y hacia el sur y la longitud determinada a partir del meridiano cero y de los meridianos que le siguen hacia el este o el oeste. De aquí la importancia de la comprensión previa de estos conceptos para que los estudiantes tengan claras las reglas del trabajo a desarrollar.

Retornando a la figura 1, la experiencia de aprendizaje se diseñó con objetivos que buscan una acción clara en los estudiantes. Ver tabla 1.

Tabla 1. Diseño de la estrategia de aprendizaje

Actitudinal	Procedimental	Cognitivo
Promover el trabajo en equipo, como una herramienta de crecimiento profesional y personal.	Desarrollar habilidades matemáticas básicas a nivel operacional y algebraico.	Incrementar las habilidades racionalizadas con el análisis variacional y aleatorio de un conjunto de datos.
El estudiante presenta de forma individual su aporte, de manera organizada, respetuosa y oportuna, con fuentes bibliográficas. Sus compañeros complementan, corrigen y colaboran.	El estudiante resuelve cada una de las pistas, debe estructurar y registrar los procedimientos de solución de cada actividad propuesta en el foro de trabajo colaborativo.	El estudiante con sus aportes, procedimientos, asociaciones, propuestas de mejora y soluciones; construye el conocimiento, a la vez realimenta, corrige y mejora los conocimientos de sus compañeros.
El docente en el proceso actúa como guía del estudiante, da nociones de cómo es el camino por seguir para llegar a dicha solución, comparte materiales y ayudas a los estudiantes, dichas ayudas son parte de la gamificación, pues el estudiante debe ganarlas resolviendo otros retos más sencillos.		

Fuente: elaboración propia.

La experiencia de aprendizaje se diseñó por medio de tres misiones, una para cada semana que está programado el trabajo colaborativo.

Misión 1: investigar sobre los siguientes temas y registrar directamente en el foro: 1. Aplicación del Teorema de Pitágoras en problemas cotidianos. 2. Área y perímetro de figuras geométricas. 3. Ecuaciones lineales. 4. Distancia entre puntos. 5. Longitud y latitud geográfica. 6. Fracciones en todos los contextos (número, operador, razón, porcentaje).

Misión 2 y 3: cada misión se compone de cuatro pistas, con sus actividades, por lo tanto, las dos misiones se resumen a continuación en la tabla 3.

Tabla 3. Pistas de la gamificación.

Pista	Descripción	Propósito de enseñanza
Cuadrado mágico	Es un cuadrado para operar los números donde el estudiante debe encontrar los valores de A, B y C, y seguido de eso se le otorgará una expresión para reemplazar estos valores encontrados y descifrar el valor de la primera pista.	1. Operar en el conjunto numérico que esté trabajando. 2. Interpretar y solucionar situaciones problema en diferentes contextos.
Programas ofertados	El estudiante debe interpretar una gráfica estadística y extraer la información y conocer las condiciones para los hombres becados, y obtener el porcentaje con respecto al total de hombres.	1. Interpretar y solucionar situaciones problema en diferentes contextos.
Encontrar el camino	Al estudiante se le proporciona una ruta en un plano cartesiano, se le indican los puntos o coordenadas de la ruta para que a través del teorema de Pitágoras calcule las distancias. Al final encuentra las instrucciones de qué hacer con estos valores.	1. Utilizar los números reales en situaciones cotidianas. 2. Comprender el concepto de distancia entre dos puntos y calcularla en la resolución de problemas. 3. Representar los puntos en el plano cartesiano
Pirámide de fracciones	El estudiante debe ubicar el valor menor de la base de la pirámide, donde los valores de los niveles inferiores al sumarse dan el valor de la casilla intermedia superior, sin embargo, la pirámide se completa de arriba hacia abajo. El estudiante debe interpretar que, si de abajo hacia arriba se suma, de arriba hacia abajo se resta, para así completar la pirámide y escoger la letra frente al menor valor.	1. Operar correctamente en el conjunto numérico en el que se esté trabajando. 2. Interpretar y solucionar situaciones problema en diferentes contextos.
Pirámide de ecuaciones	El estudiante debe resolver cada una de las ecuaciones. Los valores de la base al sumarse dan el valor que se encuentra en parte intermedia superior, al encontrar el valor que se encuentra en la cúspide de la pirámide obtendrá indicaciones para encontrar el valor de esta pista.	1. Plantear ecuaciones que den respuesta a las preguntas del problema. 2. Usar los algoritmos de solución e interpretar las soluciones matemáticas en la situación real.

Escuela de ecuaciones	El estudiante deberá interpretar cada uno de los enunciados propuestos, escribiendo la respectiva expresión y dando solución a cada uno de los ejercicios. Dentro de las instrucciones se da indicaciones de qué hacer los estudiantes con cada uno de los valores de dichas ecuaciones.	1. Plantear ecuaciones que den respuesta a las preguntas del problema. 2. Usar correctamente los algoritmos de solución e interpretar las soluciones en una situación real.
Lanzamiento Angry Birds	Al estudiante se le brindan tres funciones que simulan el lanzamiento de tres objetos, estas funciones se encuentran en un simulador en GeoGebra, en donde el estudiante debe encontrar el vértice de cada parábola y con cada deslizador encontrar la altura máxima para cada función.	1. Representar funciones cuadráticas. 2. Utilizar las diferentes representaciones de funciones para responder preguntas en una situación dada.
Comparación de figuras extrañas	El estudiante debe calcular el valor del área de tres figuras. La idea es comparar las áreas para encontrar la figura que puede tener mayor o menor área y escoger la letra frente a la figura.	

Fuente: elaboración propia.

Cuando los estudiantes reúnen todas las pistas deben seguir las indicaciones para ubicar en Google *maps* o Google *Earth* las ocho pistas y encontrar el lugar secreto, como lo muestra la figura 3.

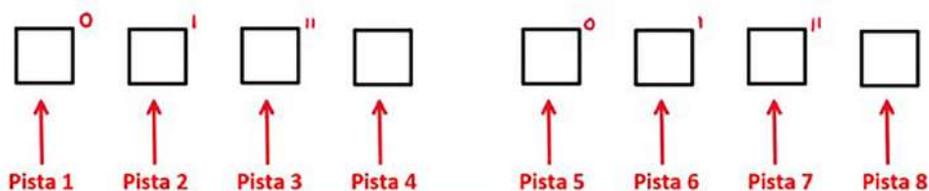


Figura 3. Ubicación geográfica final de la experiencia de aprendizaje.

Fuente: elaboración propia.

El consolidado final evalúa los tres componentes: actitudinal, procedimental y cognitivo; en el primero, los estudiantes concluyen, acuerdan y sintetizan de manera grupal la información obtenida en el foro, plasmándola en un documento final pdf, usando fuentes bibliográficas fiables que soporten sus resultados, teniendo en cuenta la referenciación o citación con normas APA. En el segundo, los estudiantes estructuran y registran en un documento final el desarrollo de las actividades indicadas en la guía de trabajo, producto del foro colaborativo con sus respectivos procedimientos, asociaciones, propuestas de mejora, diversas soluciones, de forma creativa, completa y clara sus aportes, a partir del uso de aplicaciones ofimáticas,

recursos tecnológicos, escritura matemática y editor de ecuaciones (WIRIS). Y, por último, los estudiantes interpretan y argumentan los resultados procedimentales, relacionándolos con un marco conceptual matemático, construyendo con base en dicha relación la aplicación a casos cotidianos o industriales, de manera concreta, organizada y consolidado en un documento pdf.

Modelo para la simulación

A continuación, se presenta el modelo para la situación; para ello se desmenuza de acuerdo con los temas que aborda el estudiante en su recorrido y las pistas que debe resolver para completar las misiones.

1. **Pensamiento matemático:** consiste en la sistematización y la contextualización del conocimiento de las matemáticas. Este tipo de pensamiento se desarrolla a partir de conocer el origen y la evolución de los conceptos y las herramientas que pertenecen al ámbito matemático ([Definicion.de](#), s.f.). El propósito de enseñanza es desarrollar este pensamiento para alcanzar una formación matemática más compleja y que el individuo pueda contar con un conocimiento que le permita tomar decisiones, ya que en el proceso va a razonar, reflexionar y analizar.

De acuerdo con Álvarez, Colorado y Ospina (2010), los conceptos que se manejan en la matemática están clasificados en cinco: 1. Pensamiento numérico y sistemas, 2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos, 3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas, 4. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, 5. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

- **Pensamiento numérico y sistemas:** hace referencia al concepto de número, sus relaciones, propiedades, operaciones, características y situaciones problemáticas. Los números son utilizados para medir, bien sea en condición de cardinal, de código o de símbolo; con ellos se pueden realizar operaciones básicas como adición, sustracción, multiplicación, división, entre otras. Con los números se establecen relaciones de orden, de equivalencia, de proporcionalidad; se utilizan, además, en procesos como contar, repartir, agrupar, seriar, generalizar (Álvarez, Colorado y Ospina).

Posada et al. (2005) señalan que el pensamiento numérico se concibe como la comprensión que tiene una persona sobre los números y las operaciones que realiza en un contexto determinado, junto con la

habilidad y la inclinación a usar dicha comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles en la relación que establece con su entorno.

- **Aspectos conceptuales del número:** se llama número a la colección de varias unidades de la misma especie. Los números se forman por la agregación sucesiva de una unidad a otra, por eso existe un número indefinido, puesto que siempre podremos concebir la adición de una unidad a uno, formado por grande que sea su magnitud (Tuñón, 1866). La definición del concepto de número está asociado al uso, al sentido y al significado. A partir de estas situaciones cotidianas el número toma diferentes significados:
 - Cardinal: cuando el número describe la cantidad de elementos de un conjunto, ya sea finito o infinito.
 - Medidor: cuando el número describe la cantidad de unidades de medidas que una magnitud contiene.
 - Ordinal: cuando este describe la posición relativa de un elemento en un conjunto, el cual se caracteriza por discreto y estar totalmente ordenado.
 - Código: cuando se utiliza para distinguir clase de elementos, casos como los números de celular, los códigos de barras, asignar un número a un atributo.
- **Estructuras aritméticas (campo aditivo y campo multiplicativo):** según Vergnaud (1990), el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Son de esta forma constitutivos de las estructuras aditivas los conceptos de cardinal y de medida, de transformación temporal por aumentos o disminución (perder o ganar dinero), de relación, de comparación cuantificada (tener tres dulces o tres años más que), de composición binaria de medidas (¿cuánto en total?), de composición, de transformaciones y de relaciones, de operación unitaria, de inversión, de número natural y de número relativo, de abscisa, de desplazamiento orientado y cuantificado.

Para Vergnaud (1994), el campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento

implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones: proporción simple y proporción múltiple, función lineal y no lineal, relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación y aplicaciones lineales, fracción, razón, número racional, múltiplo divisor, etc.

- **Pensamiento espacial y los sistemas geométricos:** según los lineamientos curriculares, “en los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (Álvarez, Colorado y Ospina, p.28). Dicha observación apunta a la forma como el sujeto interactúa con los objetos situados en el espacio.

Los sistemas geométricos se construyen a través de las relaciones que existen entre los objetos del espacio, la ubicación y las relaciones entre el individuo con respecto a los anteriores, así como la exploración activa de este espacio, tanto de los objetos en movimiento como en reposo. Lo anterior requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos (Álvarez, Colorado y Ospina). Howard Gardner (1983) plantea que una de las inteligencias múltiples corresponde a la espacial, que es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y la resolución de problemas.

- **Cuerpos, superficies y líneas:** una superficie puede ser considerada como la película infinitamente delgada que separa dos regiones del espacio. Si una superficie encierra una región finita del espacio, entonces hablamos de un cuerpo. A los cuerpos geométricos se les puede asignar propiedades físicas, como la masa o la densidad (Geolab, s.f.). La intersección de dos superficies de orden m y n es una curva alabeada de orden $m \times n$. De aquí se deduce que la sección plana de una superficie es del mismo orden que esta. Así, la sección plana de un plano es una recta, la de una cuadrática es una cónica, etc. De acuerdo con la teoría de Kandinsky (1994), la línea geométrica es un ente invisible. La línea es un punto en movimiento sobre el plano; al destruirse el reposo del punto, este se mueve por el espacio dando origen a la línea.

- 2. *Pensamiento geométrico:*** el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes, dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo (Vargas, 2012). Ver tabla 4.

Tabla 4. Niveles de razonamiento geométrico

Nivel	Descripción
Reconocimiento o visualización	El individuo reconoce las formas geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Produce copias de cada figura o la reconoce. No reconoce o explica las propiedades determinantes de las figuras, sus descripciones son visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico para referirse a figuras geométricas por su nombre.
El análisis	El individuo reconoce y analiza las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas, pero no relaciona o clasifica entre las propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. No elabora definiciones.
La deducción informal	El individuo determina las figuras por sus propiedades y reconoce cómo unas propiedades se derivan de otras, construye interrelaciones en las figuras y entre familias de ellas. Establece las condiciones que deben cumplir las figuras geométricas, por lo que las definiciones adquieren significado. Su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación.
La deducción formal	El individuo realiza deducciones y demostraciones lógicas y formales, reconoce y justifica las proposiciones planteadas. Comprende y maneja las relaciones entre propiedades y formaliza en sistemas axiomáticos, entiende la naturaleza axiomática de las matemáticas.
El rigor	El individuo está capacitado para analizar el grado de rigor, los deduce y compara. Aprecia la consistencia, independencia y completitud de los axiomas fundamentales de la geometría en forma abstracta.

Fuente: elaboración propia.

- 3. *El pensamiento métrico y los sistemas de medidas:*** se conforman por varios conceptos: medida, métrica y espacio. Estos sistemas cuantifican en forma numérica las dimensiones o magnitudes de los objetos externos o modelos geométricos que son construidos (Álvarez, Colorado y Ospina). Con el propósito de que los estudiantes adquieran este pensamiento, se crean situaciones en contexto en donde cada uno analizará medidas asociadas a figuras geométricas compuestas, es decir, figuras que se forman de unir las figuras geométricas básicas.

- **Construcción de magnitudes:** una magnitud es una cualidad o atributo de una serie de objetos que pueden variar en forma cuantitativa y continua o en forma cuantitativa y discreta; en el primer caso, se habla de magnitudes continuas: longitud, peso, tiempo, etc. En el segundo caso, se habla de magnitudes discretas: colecciones de objetos o personas (Galllo, 2007). Algebraicamente se define la magnitud como un semigrupo conmutativo y ordenado, formado por clases de equivalencia que son sus cantidades de magnitud.
- **Tipo de magnitudes:** a partir de la manipulación de objetos se pueden determinar aquellas cualidades o atributos medibles. Es por ello por lo que la tipología de las magnitudes, sus medidas, unidades de medida y sus sistemas de medición se hace atendiendo más a ese carácter intuitivo, y desde el punto de vista físico más que desde el punto de vista algebraico.
- **Magnitudes fundamentales y magnitudes derivadas.** Las fundamentales son aquellas que se definen por sí mismas en el proceso de medición; usando sus respectivas unidades de medida, también son llamadas indefinidas o primarias. De acuerdo con el Sistema Internacional (SI), se definen las magnitudes: longitud (metro); masa (kilogramo); tiempo (segundos); intensidad de corriente eléctrica (amperio); temperatura termodinámica (Kelvin); cantidad de sustancia (mol); intensidad luminosa (candela).

Por su parte, las magnitudes derivadas son aquellas que se derivan a partir de otras (fundamentales), o que no son medibles directamente, por ejemplo: la velocidad, la cual se define a partir de la longitud o distancia y en tiempo. De acuerdo con el Sistema Internacional, algunos ejemplos son el ángulo plano, que se mide en radianes, y el ángulo sólido, cuya unidad básica es el estereorradián.

4. **El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos:** involucra conceptos y procedimientos inter-estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la vida real como de las ciencias (Álvarez, Colorado y Ospina). Para lograr trabajar con los estudiantes este pensamiento es importante promover el concepto de variación; esta se observa cuando hay dependencia entre variables o cuando una misma cantidad varía. A partir de esto se logra desarrollar actitudes de observación, reconocimiento de diversos elementos asociados a situaciones de variación.

De acuerdo con el contenido expuesto para el curso de matemática I, los conceptos que se desarrollarán en este pensamiento son: concepto de variable, variables continuas y discretas y funciones (lineales y cuadráticas).

- **Concepto de variable:** una variable es un número que puede tomar una cantidad ilimitada de valores. En algebra, las variables suelen representarse por las últimas letras del alfabeto: x, y y z. Las constantes se representan generalmente por las letras iniciales a, b, y c. En física, geometría, electricidad y mecánica, las variables se representan casi siempre por la inicial del nombre del concepto que representan, así la base se representa por b, el voltaje por V, la velocidad por v, etc. (Bibb y Mrachek).
- **Variables continuas y discretas:** Teniendo en cuenta el estudio realizado por la Institución Educativa Dinamarca (2020), dentro de la categoría de variables cuantitativas existen dos tipos de variables: 1. Discretas: se define como cualquier variable que pueda tomar un número finito de valores entre dos valores. Por ejemplo: el número de hermanos que tienes [0,1,2, 3...]. 2. Continuas: se define como una variable que puede tomar un número infinito de valores entre dos números. Por ejemplo: la altura en un grupo de amigos.
- **Funciones (lineales y cuadráticas):** es una función polinómica de primer grado, cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta. Se define como:

$$f(x) = mx + b$$

Donde m y b son constantes reales y x es una variable real. La constante m es la pendiente de la recta; b es el punto de corte de la recta con el eje y. La variación de m modifica la inclinación de la recta. El cambio de b desplazará la línea hacia arriba o hacia abajo.

- **Función Cuadrática:** es una función polinómica definida por:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

Cuando hablamos de la representación analítica, hay tres formas de escribir una función cuadrática, aplicables según el uso que se le quiere dar a la

función. La forma polinómica de una función cuadrática corresponde a la del polinomio de segundo grado, escrito convencionalmente como:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

La forma factorizada de una función cuadrática corresponde a la del polinomio de segundo grado, escrito convencionalmente como:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Siendo a el coeficiente principal de la función, y las raíces de $f(x)$. La forma canónica de una función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio de la siguiente manera:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Siendo a el coeficiente principal y el par ordenado (h, k) las coordenadas del vértice de la parábola.

• Desarrollo de la experiencia de aprendizaje

La estrategia de gamificación, como ya se mencionó, se diseñó para el trabajo colaborativo con un foro grupal; cada grupo se conforma de manera aleatoria (máximo cinco estudiantes), se cuenta con tres misiones, cada una para realizarse en una semana. En la primera, el estudiante investiga el tema, en las dos misiones siguientes resuelva una serie de pistas o tareas, las cuales incluyen el desarrollo de ejercicios y situaciones que abarcan los temas ya tratados en el punto anterior. El desarrollo de las actividades se trabaja de manera individual, pero se resuelven a través de la discusión de los procedimientos con el fin de generar diálogos académicos, encontrar soluciones y conclusiones de forma conjunta.

En una primera versión se contempló la búsqueda del tesoro, en donde los estudiantes, junto con su equipo de trabajo, resolvían acertijos y problemas (cuatro pistas cada una en cada semana), para finalmente encontrar una coordenada geográfica: $4^{\circ}38'13''N$ $74^{\circ}03'21''W$, que corresponde al campus principal del Politécnico Grancolombiano. La implementación en el aula trajo cambios significativos, tanto en desarrollo del trabajo colaborativo como en el acompañamiento del tutor, sus conferencias y asesorías, también en las rúbricas de evaluación, dándole prioridad al trabajo en equipo.



Figura 4. Vista aérea Politécnico Grancolombiano.

Fuente: Google maps.

La primera actividad funcionaba con un documento en pdf, sin embargo, la acogida por parte de los estudiantes fue muy positiva. El problema fue que, al pasar dos cohortes de la asignatura, la actividad ya se encontraba resuelta en la web, por tanto, se toma la decisión de cambiar las actividades. También se muda del pdf a la plataforma Genially, para que fuera un poco más interactiva; desde lo gráfico se aplica la imagen institucional.



Figura 5. Ubicación geográfica Tesoro: maravillas del mundo antiguo.

Fuente: Genial.ly.

Con la implementación del nuevo trabajo colaborativo, los estudiantes debían encontrar: los Jardines colgantes de Babilonia, la gran pirámide de Guiza, la estatua de Zeus en Olimpia, el faro de Alejandría, el mausoleo de Halicarnaso, el Coloso de Rodas y, por último, el templo de Artemisa en Éfeso. Este desarrollo funcionó muy bien, con el cambio de imagen institucional, donde la Institución habla de “Somos país”, se rediseñó la propuesta resaltando nuestra cultura colombiana, permitiendo un mayor número de ubicaciones; se inició con el cañón del Chicamocho.



Figura 6. ¿Dónde se esconde una de las maravillas de Colombia?

Fuente: Genial.ly.

Es importante resaltar que a nivel gráfico la experiencia de aprendizaje ha sufrido modificaciones, la estructura didáctica se mantiene en todas las versiones, incluyendo la actual; se cuenta con acertijos, pistas o tareas en temas como operaciones con números racionales, teorema de Pitágoras, distancia entre puntos, áreas y perímetros, ecuaciones. El estudiante debe desarrollarlos y crear diálogos con sus compañeros de grupo; asimismo, es fundamental la argumentación al comentar los aportes de los compañeros.

Para la versión actual, que se refiere en este capítulo, se le insertaron personajes en 3D, recreados con IA, que construyen una narrativa más cercana al videojuego, donde el estudiante debe ir a diferentes lugares de Ciudad futura, y cada vez que finaliza una pista el juego reconoce su avance; de igual manera, se le incorporaron elementos con pruebas o preguntas de opción múltiple para que el estudiante reciba ayudas para resolver las pistas. Asimismo, las pistas fueron modificadas, por ejemplo, el cuadrado que el estudiante despejaba en la primera pista se convirtió en un cubo que gira aleatoriamente y esto hace que la primera pista cambie de acuerdo con el usuario. La pirámide de fracciones y de ecuaciones se convirtió en una actividad de arrastrar y debe relacionar su respuesta con un punto cardinal; norte, sur, este u oeste.

En la pista siete, lanzamiento Angry Birds, se programó el juego en un simulador en GeoGebra, en donde el estudiante debe encontrar el vértice de cada parábola y con cada deslizador encontrar la altura máxima para cada función. Ver la figura 7.

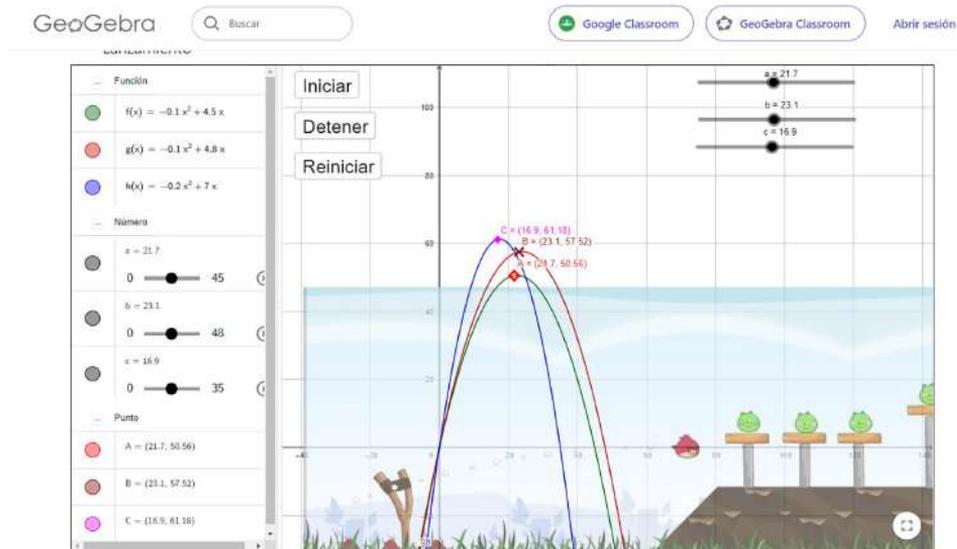


Figura 7. Simulador de Angry Birds en Geogebra.

Fuente: <https://www.geogebra.org/m/tpe99vem>

Resultados obtenidos

Durante el desarrollo del guion se tuvo presente las diversas situaciones presentadas con las versiones anteriores, dar mayor libertad al tutor máster para editar las indicaciones de las pistas y tener una mayor variedad de ubicaciones posibles.

El uso de IA, a través de un locutor, que para esta actividad es mujer, Alice, quien le mostrará al estudiante como desbloquear los niveles de Ciudad futura, en donde tendrá que visitar diversos lugares para finalmente encontrar las ocho pistas y encontrar el lugar deseado; esto contribuye a un mayor acompañamiento, ya que las grabaciones de las conferencias tienen una duración de 15 días.

Con esta estrategia de simulación se espera generar una mayor motivación en los estudiantes, que cada uno de ellos se envuelva en la historia, la dinámica y que afronten de forma correcta no solo el desarrollo de las pistas, sino que sigan el hilo conductor para encontrar los diferentes lugares dentro de Ciudad futura, descifrar los pequeños acertijos que le darán paso al ingreso del lugar donde encontrarán cada pista. Una vez tengan acceso a la pista, se espera que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos durante la primera semana; en caso de tener dudas, pueda aclararlas con el tutor en cualquiera de los espacios de conferencia o asesoría.

Conclusiones

La gamificación es una estrategia en la que se puede observar claramente que proporciona a los estudiantes una experiencia educativa más atractiva y participativa. El cambio en el paradigma pedagógico no solo repercute en la comprensión de conceptos, también contribuye al desarrollo de habilidades fundamentales, tales como la resolución de problemas, la aplicación de conceptos teóricos, el trabajo en equipo, fomentando la participación de los estudiantes en la sociedad, además de fortalecer las habilidades tecnológicas que son fundamentales para los estudiantes de la modalidad virtual.

Basado en lo anteriormente expuesto, al implementar estrategias de gamificación en el aula se obtienen beneficios significativos que potencian los resultados y, sobre todo, despiertan mayor interés en los procesos de aprendizaje por parte de los estudiantes.

Al introducirse en un escenario robusto con diversos problemas, el estudiante estará auto cuestionándose y generando un constante debate con sus compañeros acerca de sus propios planteamientos y la forma en que sus compañeros abordan el mismo

problema. Aquí en este espacio amplían sus perspectivas, pues lo interesante de las matemáticas es descubrir que no hay un solo camino para llegar a la respuesta correcta y que todas las ideas pueden aportar a la solución del problema. Con esto, al finalizar la actividad, los estudiantes validarán la posible ubicación geográfica y, en caso de no tener acuerdos, revisarán aquellas situaciones donde se presenta la diferencia.

Bibliografía

- Area, M., y González, C. (2015). De la enseñanza con libros de texto al aprendizaje en espacios online gamificados. *Educatio Siglo XXI*, 33(3), 15–38. <https://doi.org/10.6018/j/240791>
- Álvarez, D., Colorado, H., y Ospina, L. (2010). *Didáctica de las matemáticas-Una experiencia pedagógica moderna*. Universidad del Quindío. Recuperado de: https://Books.google.com.co/Books?id=LXjbdpezl_IC&pg=PT36&dq=pensamientos+matematicos&hl=es-419&sa=X&ved=0ahUKEwixk_ji4JXpAhUvc98KHftZCHgQ6AEIKDAA#v=onepage&q=pensamientos%20matematicos&f=false
- Brousseau G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).
- Caponetto, I., Earp, J., & Ott, M. (2014). Gamification and education: a literature review. In: *European conference on games-based learning*, 8, 50-57.
- Cerdas, V., Mora, Á., y Salas, S. (2020). Educación remota en el contexto universitario: necesidad del trabajo colaborativo para la mediación pedagógica docente en tiempos de COVID. *Revista Electrónica Educare*, 24(Suplemento), 1–4. <https://doi.org/10.15359/ree.24-s.9>
- Chávez, D. (2017). *El mejoramiento de las relaciones interpersonales en la educación preescolar a través del trabajo colaborativo*. Educando para educar, ISSN 2007-1469, N° 34, págs. 73-81. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7186604>
- Contijoch, M. (2014). Aprendizaje basado en tareas. En: Gilbón Acevedo, D. M.; Marrón Orozco, M.; Martinek, L.; Ortíz, A.; Contijoch, M. (coord.). *Comprensión de lectura en lengua extranjera: bases para su enseñanza*. pp. 83-93.
- Concepto (s.f.) Coordenadas geográficas. <https://concepto.de/coordenadas-geograficas/#ixzz8oHPzt0lf>
- Definición de (s.f.). Obtenido de <https://definicion.de/pensamiento-matematico/>
- Dellepiane, P. (2024). Matemática y juego: secuencia didáctica en formación docente. *Cuadernos del Centro de Estudios de Diseño y Comunicación*. 10.18682/cdc.vi215.11016.
- Deterding, S. (2015). The Lens of Intrinsic Skill Atoms: A Method for Gameful Design. *Human-Computer Interaction*, 30(3–4), 294–335. <https://doi.org/10.1080/07370024.2014.993471>

- Diago, P., y Ventura-Campos, N. (2017). Escape Room: gamificación educativa para el aprendizaje de las matemáticas. *SUMA: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 85. 33–40.
- Encalada, I. (2021). Aprendizaje en las matemáticas. La gamificación como nueva herramienta pedagógica. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 5(17), 311-326. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i17.172>
- Gallo, M. et al. (2007). *Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas: Módulo 3*. (2° Ed.). Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Medellín, Colombia
- Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Nueva York: Basic Books.
- Gardner, H. (1993a). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. Nueva York: Basic Books.
- Geolab. (s.f.). Recuperado de: <http://www.edificacion.upm.es/geometria/JPA/Generalidades.html>.
- Godoy, C. (2020). *Uso de la gamificación en el desarrollo del pensamiento lógico matemático en estudiantes de educación superior en una universidad privada de Lima, 2020*. Lima, Perú: Trabajo especial de grado de la Universidad César Vallejo para optar al título de Doctor en Educación.
- Gómez-Chacón, I. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias*, 28.
- Institución Educativa Dinamarca (2020). *Guía de aprendizaje virtual*.
- Kalogiannakis, M., Papadakis, S., & Zourmpakis, A. I. (2021). Gamification in science education. A systematic review of the literature. *Education Sciences*, 11(1), 1–36. <https://doi.org/10.3390/>
- Kandinsky, W. (1996). *Punto y línea sobre el plano: contribución al análisis de los elementos pictóricos* (6a. ed.). Labor.
- Linares, C., y Ruiz, M. (2020). Búsqueda del Tesoro: Una Alternativa para Fomentar el Aprendizaje Activo de la Física. *Congresos CLABES*, 807-813. Recuperado de: <https://revistas.utp.ac.pa/index.php/clabes/article/view/2646>
- Martínez-Martínez, A., Blanco-González, N., Campo-Benjumea, E., y García-Rodríguez, L (2019). La gamificación de las matemáticas, una estrategia de intervención en las habilidades lógico-matemáticas. HLM [The gamification of mathematics an intervention strategy in HLM logical mathematical skills]. *Revistas Signos Fónicos*, 5(2):18-37.
- Montagud, N. (2020). *La teoría de situaciones didácticas: qué es y qué explica sobre la enseñanza*. Recuperado de Psicología y mente: <https://psicologiymente.com/desarrollo/teoria-situaciones-didacticas>
- Palmer, C., Bibb, S, Jarvis, J., y Mrachek, L. (2021). *Matemáticas prácticas : aritmética, álgebra, geometría, trigonometría y regla de cálculo* (P. Pereda Vinuesa, Tran.; Segunda edición.). Barcelona: Editorial Reverté.

Politécnico Grancolombiano(s.f.). Boletín estadístico. <https://boletinestadistico.poligran.edu.co/poblacion-estudiantil.html>

Solarte, S. y Díaz, P. (2018). El Aprendizaje Afectivo y la Gamificación en Escenarios de Educación Virtual. *Información tecnológica*, 29, 237-248. 10.4067/S0718-07642018000300237.

Tuñón, M. (1866). *Sobre los diferentes sistemas de numeración y la teoría de números primos: lecciones complementarias de aritmética*. Madrid: Imprenta de Manuel Minuesa.

Vargas, G., y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94.

Vogler, C. (2002). *El viaje del escritor*. Barcelona: Editorial RobinBook.