Capítulo 2

Búsqueda de raíces

2.1. Introducción

Uno de los problemas más antiguos, y que con mayor frecuencia se debe resolver en matemáticas puras y aplicadas, consiste en encontrar ceros de funciones, es decir, para una función $f(x)$ dada, encontrar un valor c tal que $f(c) = 0$. En los cursos de cálculo el procedimiento estándar para resolver esta situación es despejar la incógnita.

Ejemplo 5. Resolver $3x - 4 = 0$.

Solución: el problema propone buscar el valor de x, que al ser reemplazado en la ecuación resulte igual a cero. Aplicando las propiedades de la igualdad, se puede proceder de la siguiente forma:

1. Sumar a ambos lados de la igualdad 4:

$$3x - 4 + 4 = 0 + 4$$

   que lleva a:

$$3x = 4$$

2. Multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{3}$:

$$\frac{3x}{3} = \frac{4}{3}$$

El anterior procedimiento permite despejar la incógnita y lleva a la respuesta final

$$x = \frac{4}{3}.$$

$\diamondsuit$

Ejemplo 6. Encontrar las soluciones de $x^2 - x - 6 = 0$.

Solución: de nuevo, aunque el procedimiento es intentar despejar la incógnita, ahora no parece tan evidente como en el ejemplo anterior:

1. Se suma seis a ambos lados de la ecuación:
$$x^2 - x = 6$$
2. Se completa el trinomio cuadrado perfecto:
$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$$
3. Se factoriza el lado izquierdo de la igualdad:
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$
4. Se calcula la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad:
$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{25}{4}}$$
5. Se resuelve la ecuación anterior para obtener:
$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Finalmente, se obtienen las dos soluciones (raíces o ceros) de la ecuación, a saber:

$$x = 3 \quad \text{y} \quad x = -2.$$

$\diamondsuit$

Un problema presente, es que hay muchas ecuaciones en ciencias e ingeniería, en las cuales no es posible aplicar un procedimiento para despejar la incógnita, como es el caso de:

- $x - \cos x = 0$
- $e^{-x} - \sin x = 0$
- $x - \tan x = 0$
- $e^{-x} - x = 0$

Cualquier intento por despejar la incógnita en las ecuaciones mencionadas arriba fracasa, aunque intuitivamente parece haber respuesta. Por ejemplo, si para la primera ecuación se hace la gráfica de las funciones x y $\cos x$, como se ilustra en la figura 2.1, el punto de corte es el cero que se busca.

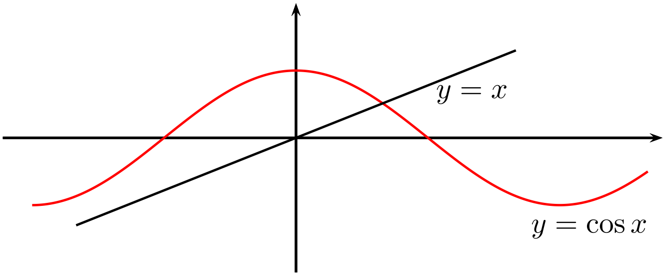

Figura 2.1: la coordenada x del punto de corte de las gráficas de las dos funciones es el cero de la función $f(x) = x - \cos x$.

Surge entonces la pregunta ¿qué se puede hacer? Es en este momento cuando entran los métodos numéricos a resolver estos interrogantes. Aunque varias técnicas van a permitir solucionar estas preguntas, sus respuestas podrían no ser exactas, contrario a las soluciones de los ejemplos 5 y 6. Lo que brindarán los métodos numéricos son aproximaciones a los resultados correctos, en principio tan precisas como se desee.

Para tener claridad del propósito del presente capítulo, se enuncia a continuación el problema que se pretende resolver.

Problema: dada la función $f(x)$, encontrar un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$.

En lo que sigue, se exponen diferentes métodos para determinar aproximaciones a la solución del problema general del capítulo.

2.2. Método de bisección

El método de bisección se basa en el teorema del valor intermedio, que en una de sus versiones establece:

Teorema 1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Ahora, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a)f(b) < 0$, por el teorema del valor intermedio se conoce que existe al menos una solución de la ecuación $f(x) = 0$, y es posible aplicar el siguiente procedimiento, denominado *método de bisección*, para determinar dicha solución.

1. Definir $a_0 = a$ y $b_0 = b$.
2. Calcular el punto medio c_0 del intervalo $[a_0, b_0]$, es decir, $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
    a) Si $f(c_0) = 0$. entonces c_0 es un cero de la función, y por lo tanto una solución al problema. Terminar el procedimiento.

b) Si $f(a_0)f(c_0) > 0$, entonces existe un cero de la función en el intervalo (c_0, b_0). Seleccionar este intervalo y definir $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$.

c) Si $f(a_0)f(c_0) < 0$, existe un cero de la función en el intervalo (a_0, c_0). Seleccionar este intervalo y definir $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$.

Nota: observar que ninguno de los tres casos mencionados arriba se puede dar simultáneamente. Además, si la situación es la del caso *b*), donde se tiene seguridad que hay un cero de la función en el intervalo (c_0, b_0), esto no descarta que pueda existir otra raíz en el intervalo (a_0, c_0).

3. Repetir el procedimiento con el nuevo intervalo $[a_1, b_1]$.

A continuación, se demuestra la convergencia del método y en la figura 2.2 se muestra en forma gráfica algunos de los pasos de su ejecución.

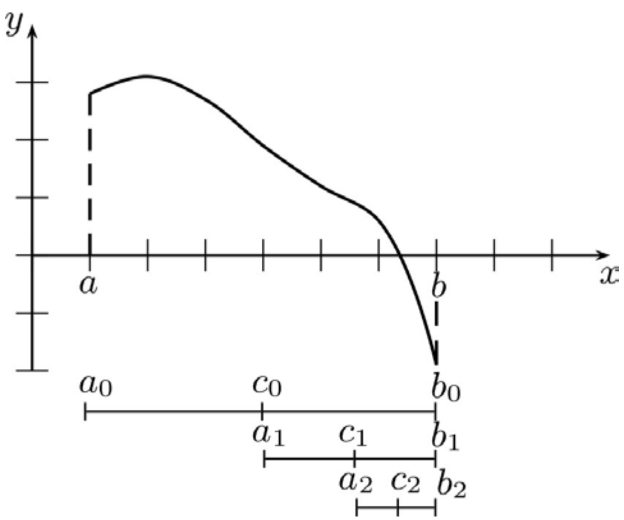

Figura 2.2: un ejemplo del método de bisección.

Teorema 2. *Si se cumplen las hipótesis del teorema del valor intermedio, entonces el método de bisección converge a un cero de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. Notar que en cada iteración la medida del intervalo se divide a la mitad. Así, en la primera iteración, la medida del intervalo $[a_1, b_1]$ es la mitad del intervalo inicial. En la segunda iteración, la medida del intervalo $[a_2, b_2]$ es la mitad de la medida del intervalo $[a_1, b_1]$, y por lo tanto corresponde a un cuarto de la medida del intervalo inicial. Similarmente, en la tercera iteración la medida del intervalo $[a_3, b_3]$ es un octavo de la medida del intervalo inicial, etc. Expresando lo anterior de manera formal se tiene:

$$\begin{aligned}
|b_1 - a_1| &= \frac{1}{2}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^1}|b_0 - a_0| && \text{Primera iteración}\\
|b_2 - a_2| &= \frac{1}{2}|b_1 - a_1| = \frac{1}{4}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^2}|b_0 - a_0| && \text{Segunda iteración}\\
|b_3 - a_3| &= \frac{1}{2}|b_2 - a_2| = \frac{1}{8}|b_0 - a_0| = \frac{1}{2^3}|b_0 - a_0| && \text{Tercera iteración}\\
&\vdots\\
|b_n - a_n| &= \frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| && n\text{-ésima iteración.}
\end{aligned}$$

Ahora, en cada intervalo $[a_n, b_n]$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$, y por lo tanto, para c_n punto medio de a_n y b_n se tiene:

$$|c_n - c| < \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|, \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Entonces $0 \leq |c_n - c| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$. Si ahora se toma el límite cuando el número n de iteraciones tiende al infinito, se tiene que $\lim_{n\to\infty} |c_n - c| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$ en caso de existir los límites. Notar que $|b_0 - a_0|$ es una constante, ya que es la medida del intervalo inicial, luego $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0| = |b_0 - a_0| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$. Se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} |c_n - c|$ existe y es igual a 0, de donde se desprende que $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente a c. □

Como se puede observar, el procedimiento encierra a un cero de la función en un subintervalo que en cada iteración es más pequeño que el anterior. Dado que $|c_n - c| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$, es posible determinar el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación de un cero de la función tan cercana como se desee. Para lo anterior, observar que si se requiere $|c_n - c| \leq \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y ε real positivo, es suficiente que $\frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| \leq \varepsilon$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^n}|b_0 - a_0| \leq \varepsilon\\
&\Rightarrow \frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon} \leq 2^n\\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon}\right) \leq n \ln 2\\
&\Rightarrow \frac{\ln|b_0 - a_0| - \ln\varepsilon}{\ln 2} \leq n,
\end{aligned}$$

y por tanto $n = \left\lceil \dfrac{\ln|b_0 - a_0| - \ln\varepsilon}{\ln 2} \right\rceil$, donde $\lceil x \rceil$ representa la función techo, es tal que $|c_n - c| \leq \varepsilon$.

Ejemplo 7. Determinar un cero de la función $f(x) = -\dfrac{1}{10}x^2 + 3$ utilizando el método de bisección y garantizando un error inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$.

Solución: lo primero es determinar dos valores a_0 y b_0 tales que $f(a_0)f(b_0) < 0$. En este caso, se escoge $a_0 = 1$ y $b_0 = 7$ y luego se calcula $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{1+7}{2} = 4$. Entonces $f(c_0) = 1.4$ y $f(a_0)f(c_0) > 0$, lo que indica que existe un cero de la función en el intervalo $[c_0, b_0]$. Se define $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ y se repite el proceso. El cuadro 2.1 presenta los resultados.

n	c_n	$\lvert a_n - b_n \rvert$
0	4.000000000000	6.000000000000
1	5.500000000000	3.000000000000
2	4.750000000000	1.500000000000
3	5.125000000000	0.750000000000
4	5.312500000000	0.375000000000
5	5.406250000000	0.187500000000
6	5.453125000000	0.093750000000
7	5.476562500000	0.046875000000
8	5.488281250000	0.023437500000
9	5.482421875000	0.011718750000
10	5.479492187500	0.005859375000
11	5.478027343750	0.002929687500
12	5.477294921875	0.001464843750
13	5.476928710938	0.000732421875
14	5.477111816406	0.000366210938
15	5.477203369141	0.000183105469
16	5.477249145508	0.000091552734

Cuadro 2.1: solución de la ecuación $-\dfrac{1}{10}x^2 + 3 = 0$ con el método de bisección.

Se tiene entonces que $c_{16} = 5.477249145508$ es una aproximación de un cero de la función con la cota superior de error.

$$|c_{16} - c| \leq |b_{16} - a_{16}| = 0.000091552734$$

y por tanto la aproximación es correcta al menos en cuatro cifras decimales. $\diamondsuit$

Ejemplo 8. Determinar la cantidad de iteraciones, en el método de bisección, necesarias para obtener una aproximación de la solución de la ecuación $x - \cos x = 0$ con un error inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$ si $a_0 = 0.5$ y $b_0 = 1$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
n &= \left\lceil \frac{\ln|b_0 - a_0| - \ln\varepsilon}{\ln 2} \right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{\ln 0.5 - \ln 10^{-4}}{\ln 2} \right\rceil \\
&= \lceil 12.28771238 \rceil \\
&= 13
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se necesitan trece iteraciones en el método de bisección para alcanzar la precisión deseada. $\diamondsuit$

En este punto, es necesario mencionar algunos criterios para detener un proceso iterativo como el método de bisección.

2.2.1. Criterios de parada

Si $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión convergente a un valor c, es decir $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, entonces si se desea determinar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|c_N - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ para una tolerancia $\varepsilon > 0$, es necesario generar $c_1, c_2, c_3, \ldots$ hasta que se cumpla una de las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
&|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon, \\
&\frac{|c_n - c_{n-1}|}{|c_n|} < \varepsilon, \quad c_n \neq 0.
\end{aligned}
$$

El criterio $|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$ se utilizará como criterio de parada para los métodos iterativos de este capítulo.

Ejemplo 9. Sea $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, determinar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|c_N - c_{N-1}| < 10^{-6}$

Solución: se genera $c_1 = 2, c_2 = 2.25, \ldots$ y se evalúa $|c_N - c_{N-1}|$, concluyendo que para $N = 368$ se tiene $|c_{368} - c_{367}| = |2.71459768679726 - 2.7145876732699| < 10^{-6}$. $\diamondsuit$

2.2.2. Método de *regula falsi*

Este método es un intento por aumentar la rapidez del método de bisección. Los algoritmos solo se diferencian en el punto del intervalo que calculan. Mientras en bisección es el punto medio, en *regula falsi* es el corte con el eje x de la recta que une los puntos extremos de la gráfica definida en el intervalo $[a_n, b_n]$, como se muestra en la figura 2.3.

Si a_n y b_n son los extremos del intervalo, entonces la ecuación de la recta que contiene los puntos $(a_n, f(a_n))$ y $(b_n, f(b_n))$ es $y = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n) + f(a_n)$. En dicho caso, el corte con el eje x es $a_n - \dfrac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$, y lo anterior define el punto c_n que se espera brinde una mejor aproximación.

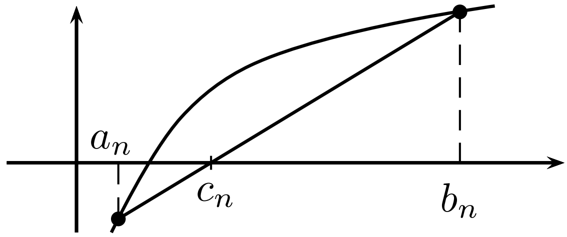

Figura 2.3: método de *regula falsi.*

Ejemplo 10. Determinar un cero de la función $f(x) = -\dfrac{1}{10}x^2 + 3$ con un error inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$, utilizando el método de *regula falsi.*

Solución: se determinan dos valores a_0 y b_0 tales que $f(a_0)f(b_0) < 0$. En este caso se escoge $a_0 = 1$ y $b_0 = 7$, y se calcula $c_0 = a_0 - \dfrac{f(a_0)(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = 4.625$ y $f(c_0) = 0.8609375$. Por lo tanto $f(a_0)f(c_0) > 0$, lo que indica que existe un cero de la función en el intervalo $[c_0, b_0]$. Se define $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$ y se repite el proceso. El cuadro 2.2 presenta los resultados.

n	c_n
0	4.625000000000
1	5.365591397849
2	5.463478260870
3	5.475545942929
4	5.477020557904
5	5.477200553464
6	5.477222521303

Cuadro 2.2: solución de la ecuación $-\dfrac{1}{10}x^2 + 3 = 0$ con el método de *regula falsi.*

Luego, utilizando el criterio de parada, c_6 es una aproximación de la solución de la ecuación $-\dfrac{1}{10}x^2 + 3 = 0$ con un error inferior a $\varepsilon = 10^{-4}$. $\diamondsuit$

Observación: las condiciones necesarias para asegurar la convergencia del método de *regula falsi* corresponden a las condiciones del método de bisección. Aunque no es posible aplicar la fórmula del método de bisección para calcular la cantidad de iteraciones necesarias en su ejecución, se espera lograr la precisión establecida en un menor número de iteraciones.

Ejercicios 3

1. Utilizar el método de bisección para obtener c_5, con $f(x) = e^{-x-0.7} - x - 0.7$ en el intervalo $[-1, 0]$.

2. Utilizar el método de bisección para aproximar un cero de la función con una precisión de 10^{-5} dentro del intervalo indicado:

   a) $f(x) = \cos(e^x) + x$ en $[-2, 0]$.

   b) $f(x) = 2^x(x - 6) - x$ en $[-3, -1]$.

   c) $f(x) = \sin(3x) - \cos(2x) - 1$ en $[-3, 5]$.

   d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x - 3} + 2x$ en $[1, 2]$.

   e) $f(x) = x^{-2} - \tan x$ en $[3, 4]$.

   f) $f(x) = x^3 - 4x\cos x + (2\sin x)^2 - 3$, en los intervalos $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ y $[1, 2]$.

3. Aplicar el método de bisección para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con una precisión de 10^{-7} en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Qué sucede?

4. Utilizar el método de *regula falsi* para aproximar un cero de la función $f(x) = xe^{-2x} + x + 1$ con una precisión de 10^{-6}.

5. Utilizar el método de bisección y *regula falsi* para aproximar un cero de cada función con una precisión de 10^{-6}. Comparar el número de iteraciones necesarias en cada método.

   a) $f(x) = (x - 1)^{4.5} - 5(x - 1) - 0.1$ en $[2, 3]$.

   b) $g(x) = x\ln(x + 1) - 2$ en $[0, 2]$.

6. Construir una tabla de datos desde -1 hasta 2, en pasos de 0.1 para detectar cambios de signo e identificar intervalos donde ocurran ceros de la función

   $$f(x) = \frac{x^5 - 3x^3 - 8x^2 - x - 4}{x^3 + 2x^2 + x + 6}.$$

   Con el método de *regula falsi*, encontrar dichos ceros con precisión hasta la tercera cifra decimal.

7. Con ayuda de algún *software* de cómputo científico, construir la gráfica de

   $$f(x) = |x| - \cos x$$

   en el intervalo $[-4, 4]$. Con el método de bisección, encontrar los ceros con una precisión de cuatro cifras decimales.

2.3. Método de Newton-Raphson

Este método se basa en elementos del cálculo diferencial y su interpretación gráfica. Es uno de los métodos más eficientes[1] para determinar, con una precisión deseada, una aproximación de la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Gráficamente (ver figura 2.4), se puede interpretar el método de Newton de la siguiente manera:

1. Seleccionar un punto inicial (semilla) p_0.
2. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ que pasa por el punto $(p_0, f(p_0))$
3. Determinar el corte con el eje x de la recta tangente y nombrar como p_1.
4. Si $f(p_1) \neq 0$ repetir los pasos $2, 3$ y 4 para p_1.

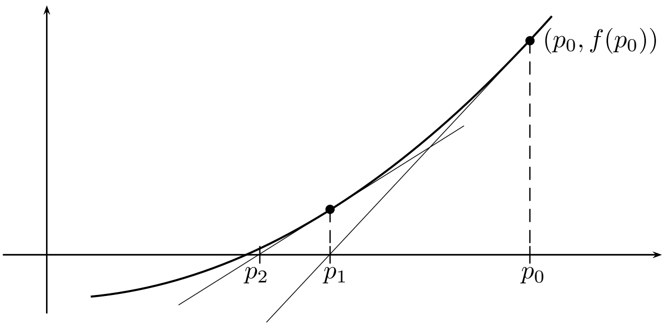

Figura 2.4: método de Newton-Raphson.

Ahora, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(p_0, f(p_0))$ tiene como pendiente $m = f'(p_0)$ y corresponde a

$$y = f'(p_0)x + [f(p_0) - f'(p_0)p_0]$$

para calcular el cero de esta recta se reemplaza y por cero

$$0 = f'(p_0)x + f(p_0) - f'(p_0)p_0$$

y al despejar x, se tiene $x = p_0 - \dfrac{f(p_0)}{f'(p_0)}$. Dicho valor de x se nombra como p_1 y por tanto:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

[1]En cuanto a cantidad de iteraciones se refiere.

Si se repite el proceso, pero ahora con el punto $(p_1, f(p_1))$, se obtiene:

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)}.$$

Repitiendo ahora con $(p_2, f(p_2))$

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)},$$

y finalmente, en la n-ésima iteración

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \tag{2.1}$$

que es la fórmula de iteración correspondiente al método de Newton-Raphson.

Ejemplo 11. Determinar una solución de la ecuación $e^{-x} - \sin x = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ usando el método de Newton-Raphson.

Solución: si se realiza la gráfica de la función $f(x) = e^{-x} - \sin x$, se observa que la función posee varios ceros y uno de ellos está en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, seleccionando $p_0 = 0.2$ se espera que el método de Newton-Raphson sea convergente. Por otro lado, $f'(x) = -e^{-x} - \cos x$, de donde se tiene:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} = 0.2 - \frac{e^{-0.2} - \sin 0.2}{-e^{-0.2} - \cos 0.2} = 0.544708885$$

Ahora, $p_2 = p_1 - \dfrac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 0.587795322484$, observando los resultados del cuadro 2.3 y utilizando el criterio de parada, se obtiene que $p_4 = 0.588532743982$ es una aproximación de la solución de la ecuación $e^{-x} - \sin x = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$. $\diamondsuit$

n	p_n
0	0.200000000000
1	0.544708885000
2	0.587795322484
3	0.588532526471
4	0.588532743982

Cuadro 2.3: resultados del método de Newton-Raphson.

2.3.1. Método de la secante

Aunque el método de Newton-Raphson es uno de los más eficientes para determinar una solución de la ecuación $f(x) = 0$, la necesidad de conocer $f'(x)$ representa una de sus mayores debilidades, pues el cálculo de la derivada requiere y representa más operaciones por realizar. Una manera de evitar el problema de calcular la derivada, es recordar que

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

y dado que p_{n-2} se encuentra cerca de p_{n-1} en caso de ser convergente el método de Newton-Raphson, entonces es posible aproximar $f'(p_{n-1})$ por

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}}.$$

Al sustituir en la fórmula de iteración de Newton-Raphson, se obtiene

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

La anterior fórmula de iteración se denomina *método de la secante*. Es de anotar, que para utilizar el anterior método, son necesarias dos aproximaciones iniciales (semillas) p_0 y p_1. Una interpretación geométrica (figura 2.5) del método de la secante es la siguiente:

1. Seleccionar dos puntos iniciales p_0 y p_1.
2. Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, f(p_1))$.
3. Determinar el corte con el eje x de la anterior recta y nombrarlo como p_2.
4. Si $f(p_2) \neq 0$, repetir los pasos $2, 3$ y 4 para p_1 y p_2.

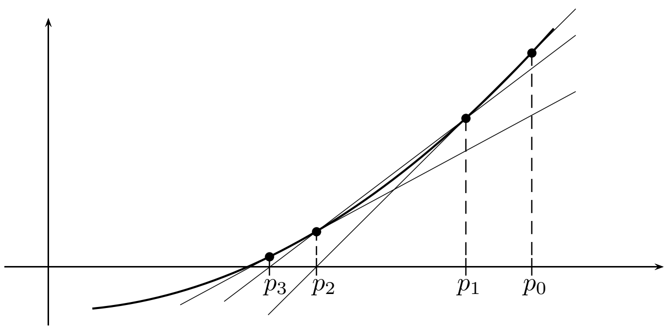

Figura 2.5: método de la secante.

Ejemplo 12. Aplicar el método de la secante para obtener una solución de la ecuación $x - 0.5\tan(x) = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$ en el intervalo $[1, 2]$.

Solución: tomando como puntos iniciales $p_0 = 1.2$ y $p_1 = 1$, dado que la gráfica de $f(x) = x - 0,5\tan(x)$ así lo indica, se obtiene

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)(p_1 - p_0)}{f(p_1) - f(p_0)} = 1 - \frac{0.221296137673(1 - 1.2)}{0.221296137673 - (-0.086075811063)} = 1.143992409576.$$

Al continuar las iteraciones, se tiene que $p_7 = 1.165561185173$ es la aproximación deseada a la solución de la ecuación $x - 0.5\tan(x) = 0$. Los resultados del método se presentan en el cuadro 2.4. $\diamondsuit$

n	p_n
0	1.200000000000
1	1.000000000000
2	1.143992409576
3	1.180243146455
4	1.164484056894
5	1.165508347221
6	1.165561377918
7	1.165561185173

Cuadro 2.4: resultados del método de la secante.

Ejercicios 4

1. Determinar p_3 en el método de Newton-Raphson al aplicarlo en la solución de la ecuación $e^{-x} - x = 0$ si $p_0 = -1$.

2. Usar el método de Newton-Raphson para obtener una aproximación de las soluciones de los siguientes problemas con una precisión de $\varepsilon = 10^{-7}$.

   a) $4x^2 - 4xe^{-2x} + e^{-4x} = 0$ en $[0, 1]$.
   b) $3x^2 + \ln(x)(2x + \ln(x)) = 2x^2$ en $[0, 1]$.
   c) $e^{-2}x^2 + 2e^{-1}x - 1 = 0$ en $[0, 2]$.

3. Utilizar el método de Newton-Raphson para aproximar la solución de cada ecuación desde el punto p_0 y con una precisión de $\varepsilon = 10^{-8}$.

   a) $\tan^{-1}(x) = 0$, $p_0 = 1.2$.
   b) $-x^4 + 6x^2 + 1 = 0$, $p_0 = 3$.
   c) $1 - 2e^{-x^2} = 0$, $p_0 = 1.5$.
   d) $\sin x - e^{-x} = 0$, $p_0 = 2.5$.

4. Usar el método de Newton-Raphson para aproximar $\sqrt[3]{25}$ con seis cifras decimales correctas. *Ayuda:* considerar $f(x) = x^3 - 25$.

5. Usar el método de la secante para aproximar un cero (con una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$) de la función $h(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[1, 2]$.

6. Sea $f(x) = \ln(x)$, $p_0 = 1.3$ y $p_1 = 1.5$. Utilizar el método de la secante para aproximar un cero de la función con una precisión $\varepsilon = 10^{-4}$. Comparar con el resultado de aplicar el método de Newton-Raphson con punto inicial $p_0 = 1.4$.

7. Si $f(x) = e^{-2x} - 2x + 1$, utilizar el método de Newton-Raphson para aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-8}$ si $p_0 = 1.5$. Comparar (en cantidad de iteraciones) el resultado con el obtenido al aplicar el método de la secante con $p_0 = 1.6$ y $p_1 = 1.7$.

8. Identificar el propósito de la siguiente fórmula de iteración obtenida con el método de Newton-Raphson:
$$x_{n+1} = 2x_n - x_n^2 R.$$
Para lo anterior, considerar que cuando $n \to \infty$, $x_n \to A$.

9. Identificar el propósito de la siguiente fórmula de iteración obtenida con el método de Newton-Raphson:
$$x_{n+1} = 0.5\left(x_n + \frac{19}{x_n}\right).$$
Para lo anterior, considerar que cuando $n \to \infty$, $x_n \to A$.

2.4. Método de punto fijo

Desde la antigua Babilonia es conocido el siguiente método para calcular $\sqrt{A}$:

1. Seleccionar x_0 cercano a $\sqrt{A}$.

2. Calcular $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{A}{x_n}\right)$ para $n > 0$.

Este método es eficiente y uno de los mejores ejemplos de la técnica que se desarrolla en esta sección para aproximar soluciones de ecuaciones. Aunque existen muchas técnicas numéricas que dan solución a la ecuación $f(x) = 0$, tal vez una de las más famosas es el llamado *método del punto fijo*, un procedimiento para aproximar la solución de la ecuación $x = g(x)$. Para comprender este método, es necesario dar algunas definiciones y ejemplos.

Definición 3. *Un punto fijo de una función $g(x)$ es un valor c tal que $g(c) = c$.*

Ejemplo 13. La función $g(x) = x$, tiene infinitos puntos fijos, dado que para cualquier valor de c, $g(c) = c$.

Ejemplo 14. Mostrar que la función $g(x) = x^2 + 6x + 6$ tiene dos puntos fijos, $x = -2$ y $x = -3$.

Solución: se tiene que $g(-2) = (-2)^2 + 6(-2) + 6 = 4 - 12 + 6 = -2$, luego $g(-2) = -2$. Similarmente $g(-3) = 9 - 18 + 6 = -3$ y por tanto $g(-3) = -3$. $\diamondsuit$

¿Por qué es relevante encontrar puntos fijos? La respuesta radica en que los problemas de encontrar ceros de funciones y encontrar puntos fijos de funciones están estrechamente relacionados. Por ejemplo, para calcular los puntos fijos de la función del ejemplo 14, se puede plantear la ecuación, $g(x) = x$, es decir $x^2 + 6x + 6 = x$, que organizando términos lleva a la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$. Luego el problema de buscar el punto fijo de $g(x)$ se convirtió en el de buscar ceros de una nueva función, en este caso de $f(x) = x^2 + 5x + 6$. Para generalizar y resumir, se construyó una función $f(x)$ a partir de la función $g(x)$, de la manera $f(x) = g(x) - x$, de tal forma que si la función $g(x)$ tiene un punto fijo, c, este punto fijo de $g(x)$ es un cero de $f(x)$, dado que $f(c) = g(c) - c$ y como $g(c) = c$, entonces $f(c) = c - c = 0$.

El problema inverso también es válido. Si la función $f(x)$ tiene un cero en p, entonces podemos construir una nueva función $g(x)$ a partir de $f(x)$, en la cual el cero de $f(x)$ sea un punto fijo de $g(x)$. Se puede verificar lo anterior tomando, por ejemplo, a $g(x) = x + f(x)$. Notar que si se evalúa $g(x)$ en p se obtiene $g(p) = p + f(p)$, y como $f(p) = 0$, entonces $g(p) = p + 0 = p$ y por lo tanto el cero de $f(x)$ es un punto fijo de $g(x)$. Entonces, como seguramente ya se intuye, la idea general es cambiar el problema $f(x) = 0$ por el problema $g(x) = x$.

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para la existencia de un punto fijo.

Teorema 3. *Sean* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *y* $g : [a, b] \to [a, b]$ *una función continua. Entonces* g *tiene un punto fijo en* $[a, b]$.

Demostración. Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$, entonces un punto fijo de g es un extremo. En caso contrario, se tiene $g(a) > a$ y $g(b) < b$. Dado que $f(x) = g(x) - x$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) = g(a) - a > 0$ y $f(b) = g(b) - b < 0$, por el teorema del valor intermedio se sigue que f tiene un cero en $[a, b]$, es decir, existe $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = 0$, lo que implica que $g(p) - p = 0$, o de manera equivalente $g(p) = p$. $\square$

Ahora, para calcular una aproximación de un punto fijo de una función g es posible aplicar el siguiente procedimiento (ver figura 2.6):

1. Seleccionar un punto inicial p_0.
2. Calcular $g(p_0)$ y nombrarlo como p_1.
3. Si $g(p_1) \neq p_1$, repetir los pasos 2 y 3 para p_1.

Este procedimiento recibe el nombre de *método de punto fijo*.

Ejemplo 15. Utilizar el método de punto fijo para obtener una aproximación a la solución de la ecuación $x = \sqrt{\dfrac{10}{x+4}}$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-7}$.

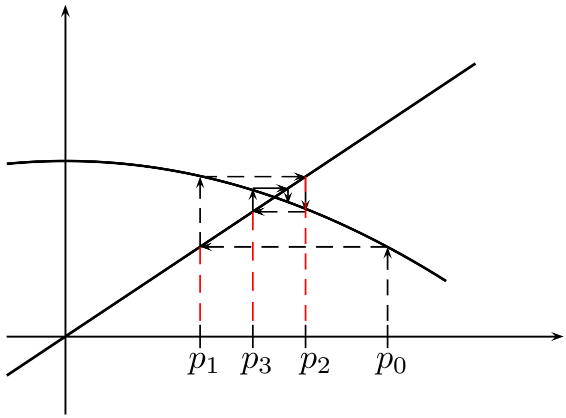

Figura 2.6: método de punto fijo.

Solución: seleccionar un punto inicial p_0, en este caso $p_0 = 1.5$. Calcular $p_1 = g(p_0) = \sqrt{\dfrac{10}{p_0 + 4}} = 1.348399724926$, y dado que $|p_0 - p_1| > 10^{-7}$, se repite el proceso. Calcular $p_2 = g(p_1) = 1.367376371991$, y ya que $|p_1 - p_2| > 10^{-7}$ se sigue iterando. Los resultados se resumen en el cuadro 2.5, de donde $p_8 = 1.365230022516$ es una aproximación a la solución de la ecuación $x = \sqrt{\dfrac{10}{x+4}}$ con la precisión deseada. $\diamondsuit$

n	p_n
0	1.500000000000
1	1.348399724926
2	1.367376371991
3	1.364957015402
4	1.365264748113
5	1.365225594161
6	1.365230575673
7	1.365229941878
8	1.365230022516

Cuadro 2.5: resultados del método de punto fijo.

En este punto es necesario presentar condiciones suficientes para garantizar que el método de punto fijo sea convergente. El siguiente teorema, conocido como *teorema de punto fijo* es un resultado fundamental al respecto.

Teorema 4. *Sean $g : [a, b] \to [a, b]$ una función continua, $s \in [a, b]$ tal que $g(s) = s$ y $|g'(x)| \leq \alpha < 1$, donde $x \in (a, b)$ y α es constante. Sea $p_0 \in [a, b]$. Entonces la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por $p_{n+1} = g(p_n)$ es tal que $p_n \to s$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Como $g(x)$ es continua en $[a, b]$ y tanto p_0 como s, se encuentran en $[a, b]$, entonces el teorema del valor medio para derivadas asegura la existencia de ζ tal que:

$$g'(\zeta) = \frac{g(p_0) - g(s)}{p_0 - s}.$$

Tomando el valor absoluto y observando las hipótesis del teorema de punto fijo,

$$|g'(\zeta)| = \left| \frac{g(p_0) - g(s)}{p_0 - s} \right| \leq \alpha < 1.$$

Al aplicar propiedades del valor absoluto se tiene

$$|g(p_0) - g(s)| \leq \alpha |p_0 - s|.$$

Como $g(s) = s$ y $g(p_0) = p_1$, al reemplazar se sigue que:

$$|p_1 - s| \leq \alpha |p_0 - s|.$$

Lo cual significa que la distancia entre p_1 y s es menor que la distancia entre p_0 y s. Ahora se repite el razonamiento, pero empezando con p_1 y s, lo cual lleva a:

$$|p_2 - s| \leq \alpha |p_1 - s|,$$

luego

$$|p_2 - s| \leq \alpha |p_1 - s| \leq \alpha(\alpha |p_0 - s|) = \alpha^2 |p_0 - s|,$$

por lo tanto

$$|p_2 - s| \leq \alpha^2 |p_0 - s|,$$

y continuando el proceso hasta la n-ésima iteración, se tiene:

$$|p_n - s| \leq \alpha^n |p_0 - s|.$$

Si se toma el límite cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n \to \infty} |p_n - s| \leq \lim_{n \to \infty} \alpha^n |p_0 - s| = |p_0 - s| \lim_{n \to \infty} \alpha^n$$

y como α es tal que $0 \leq \alpha < 1$, se tiene que $\lim_{n \to \infty} \alpha^n = 0$ y por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} |p_n - s| = 0,$$

lo que significa que siempre que n tienda a infinito, p_n tiende a s. □

Para ilustrar la forma en que opera el método de punto fijo y su relación con la ecuación $f(x) = 0$, se analizará un par de situaciones.

Ejemplo 16. Encontar una solución de $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-7}$.

Solución: como el método de punto fijo encuentra aproximaciones a la solución de la ecuación $x = g(x)$, lo primero que se debe realizar es convertir el problema $f(x) = 0$ en un problema $x = g(x)$, para lo cual es suficiente despejar una x:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 10 &= 0 \\ x^3 + 4x^2 &= 10 \\ x^2(x+4) &= 10 \\ x^2 &= \frac{10}{x+4} \\ x &= \sqrt{\frac{10}{x+4}} \end{aligned}$$

Ahora, una forma de garantizar que el método sea convergente, es verificar que $g(x) = \sqrt{\dfrac{10}{x+4}}$ cumple las hipótesis del teorema 4 en algún intervalo, en este caso $[1, 2]$. Al seleccionar $p_0 = 1.5$ se obtienen los resultados del cuadro 2.5 presentado en el ejemplo 15. $\diamondsuit$

Ejemplo 17. Encontrar una aproximación con tres decimales correctos a la solución de $\cos x - x = 0$.

Solución: repitiendo los pasos del ejemplo anterior, se tiene:

1. Despejar una x. Lo más simple es $x = \cos x$ y por tanto $g(x) = \cos x$.
2. Para garantizar que el método de punto fijo sea convergente, se busca el intervalo $[a, b]$ para satisfacer las hipótesis del teorema 4, en este caso $[0, 1]$.
3. Seleccionar p_0 en el intervalo, en este ejemplo $p_0 = 0$.
4. Aplicar la iteración $p_{n+1} = g(p_n)$.

En el cuadro 2.6 se incluyen los valores de la sucesión $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{24}$, donde en p_{24} ya se ha alcanzado la precisión deseada. $\diamondsuit$

Observación: se debe apreciar que una implementación de método de punto fijo debe contemplar un número máximo de iteraciones, debido a que no todas las fórmulas son convergentes. Además, en caso de convergencia, se deben estimar otros criterios que detengan el programa en el momento de alcanzar la precisión deseada, como es el caso del criterio de parada $|p_{i+1} - p_i| < \varepsilon$ de la sección 2.2.1.

Ejemplo 18. Usando una fórmula de punto fijo, encontrar el valor de un cero de $f(x) = x^3 - x - 1$ preciso hasta la cuarta cifra decimal.

Solución:

1. Despejar x, en este caso, $x = x^3 - 1$ y por tanto $g(x) = x^3 - 1$.

i	p_i
1	1.000000000000
2	0.540302305868
3	0.857553215846
4	0.654289790498
5	0.793480358743
$\vdots$	$\vdots$
19	0.739303892397
20	0.738937756715
21	0.739184399771
22	0.739018262427
23	0.739130176530
24	0.739054790747

Cuadro 2.6: solución de la ecuación $x = \cos x$.

2. Elegir p_0, en este caso $p_0 = 1.5$, pues la evidencia gráfica respalda la existencia de un cero en el intervalo $[1, 2]$.
3. Aplicar $p_{n+1} = g(p_n)$ obteniendo los resultados del cuadro 2.7.

i	p_i
0	1.500000000000
1	2.375000000000
2	12.39648437500
3	1904.002772234
4	6902441412.889
5	3.2885783**E**+29
6	3.5565143**E**+88
7	4.498561**E**+265

Cuadro 2.7: solución de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Método divergente.

En este momento es mejor detener el proceso, puesto que la sucesión no tiende a ningún número en particular. Por el contrario, tiende a infinito, y por tanto la sucesión es divergente. $\diamondsuit$

El ejemplo anterior presenta una de las dificultades del método de punto fijo para aproximar una solución de la ecuación $f(x) = 0$: la necesidad de transformar $f(x) = 0$ en un problema del formato $x = g(x)$, donde $g(x)$ cumpla las hipótesis del teorema 4. A continuación se tiene un ejemplo al respecto.

Ejemplo 19. Usando una fórmula de punto fijo, encontrar el valor de un cero de $f(x) = x^3 - x - 1$ preciso hasta la cuarta cifra decimal.

Solución: al despejar x, en este caso, $x = x^3 - 1$ y usar $g(x) = x^3 - 1$, el ejemplo anterior muestra que se tiene una sucesión divergente. En cambio, si se usa el despeje alternativo

$$x = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

válido cuando $x > 0$, se tiene un problema equivalente y convergente según los resultados del cuadro 2.8, donde se aplica el método de punto fijo a $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ con $p_0 = 0.9$. $\diamondsuit$

i	p_i
0	0.900000000000
1	1.452966314514
2	1.299325671882
3	1.330274402908
4	1.323527334417
5	1.324974241803
6	1.324662845115
7	1.324729811194
8	1.324715407719

Cuadro 2.8: solución de la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Método convergente.

Ejercicios 5

1. Solucionar las siguientes ecuaciones utilizando el método de punto fijo con una precisión de $\varepsilon = 10^{-8}$.

   a) $x - e^{-x} = 0$.

   b) $x + 4e^{-2x} - 4\ln(x) = 0$.

   c) $0.5\sin(e^{-2x}) - x = 0$.

   d) $e^{-x} + \ln(x+8) - x^2 = 0$.

2. Dados los siguientes esquemas de punto fijo para obtener una solución de la ecuación $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$, clasificar por la rapidez de convergencia. Suponer que $p_0 = -1.5$.

   a) $p_n = \sqrt{\dfrac{-10}{p_{n-1} - 4}}$

   b) $p_n = \dfrac{8p_{n-1} - 10}{p_{n-1}^2 - 4p_{n-1} + 8}$

   c) $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 4p_{n-1}^2 + 10}{3p_{n-1}^2 - 8p_{n-1}}$

   d) $p_n = \dfrac{\sqrt[3]{4p_{n-1}^2 - 10} + p_{n-1}}{2}$

3. Utilizar el método de punto fijo y el método de Newton-Raphson para determinar una solución de la ecuación $3e^{-x} - 2x + \ln(x) = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-8}$. Comparar la cantidad de iteraciones necesarias en cada método.

4. Utilizar el método de punto fijo y el método de Newton-Raphson para determinar un cero de la función $f(x) = x^3 - 3x^2e^{-x} + 3xe^{-2x} - e^{-3x}$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-8}$.

5. Utilizar el método de punto fijo para determinar 1/9 al utilizar únicamente sumas y multiplicaciones. *Sugerencia:* considerar $f(x) = 9x - 1$.

6. Utilizar el método de punto fijo y el método de la secante para determinar una solución de la ecuación $x^3 - xe^{-x} = 0$ con una precisión de $\varepsilon = 10^{-6}$. Comparar la cantidad de iteraciones necesarias en cada método.

7. Si se tiene que el siguiente esquema de punto fijo es convergente, determinar su valor límite:
$$\begin{cases} p_0 = 0.8 \\ p_n = \dfrac{2p_{n-1} - 1}{p_{n-1}^2 - 2p_{n-1} + 2} \end{cases}$$
Sugerencia: considerar $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 2x + 2}$.

8. Considerar la expresión:
$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}.$$
Demostrar con razonamientos de punto fijo, que tiende a la razón áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9. Considerar la fracción continua:
$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$
Con razonamientos de punto fijo, demostrar que tiende a $\phi - 1$, donde ϕ es como en el ejemplo anterior.

2.5. Orden de convergencia en el método de punto fijo

En esta parte se estudiará el orden de convergencia de los esquemas de punto fijo, y se observará que, en la mayoría de los casos, la convergencia del método es lineal de acuerdo a lo expuesto en la sección 1.5.

Teorema 5. *Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ una función continua, $g'(x)$ continua en (a, b) y $k < 1$ constante positiva con*
$$|g'(x)| \leq k \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$
Si $g'(p) \neq 0$, para p punto fijo de g en $[a, b]$, entonces para cualquier número p_0 en $[a, b]$ la sucesión
$$p_n = g(p_{n-1}) \quad n \geq 1$$
converge linealmente a p.

Demostración. Con los resultados de la sección 2.4 se puede comprobar que la sucesión $p_n = g(p_{n-1})$ converge a p. Dado que $g'(x)$ existe, entonces por el teorema del valor medio, para cada $n \geq 1$ existe ξ_n tal que

$$\frac{g(p_n) - g(p)}{p_n - p} = g'(\xi_n)$$

luego $p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = g'(\xi_n)(p_n - p)$, donde ξ_n esta entre p_n y p. Ahora, como $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p, entonces $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p, y por la continuidad de $g'(x)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(p).$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = \lim_{n\to\infty} |g'(\xi_n)| = |g'(p)|$$

y por hipótesis, $g'(p) \neq 0$, de donde se concluye que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge linealmente al punto p. □

Aunque el teorema anterior demuestra el comportamiento de los esquemas de punto fijo, existen casos donde la convergencia del método de punto fijo es cuadrática, y para lo anterior, hay que observar lo siguiente:

Si p es un punto fijo de $g(x)$ y se conoce $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, ... en p, entonces se puede expandir $g(x)$ en serie de Taylor alrededor de p

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x-p) + \frac{g''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{g'''(p)}{3!}(x-p)^3 + \cdots ,$$

y al evaluar la serie en p_n se obtiene

$$g(p_n) = g(p) + g'(p)(p_n-p) + \frac{g''(p)}{2!}(p_n-p)^2 + \frac{g'''(p)}{3!}(p_n-p)^3 + \cdots .$$

Ahora, dado que $g(p) = p$, ya que es punto fijo, y también que $g(p_n) = p_{n+1}$, se desprende que

$$p_{n+1} = p + g'(p)(p_n-p) + \frac{g''(p)}{2!}(p_n-p)^2 + \frac{g'''(p)}{3!}(p_n-p)^3 + \cdots$$

al pasar p al lado izquierdo

$$p_{n+1} - p = g'(p)(p_n-p) + \frac{g''(p)}{2!}(p_n-p)^2 + \frac{g'''(p)}{3!}(p_n-p)^3 + \cdots$$

lo cual, si se define el error en la iteración n como $e_n = p_n - p$, llevaría a:

$$e_{n+1} = g'(p)e_n + \frac{g''(p)}{2!}e_n^2 + \frac{g'''(p)}{3!}e_n^3 + \cdots \tag{2.2}$$

Si $|e_n| < 1$ entonces la magnitud de $|e_n^2|$ es más pequeña y la de $|e_n^3|$ aún más y así sucesivamente. En estas circunstancias, si $g'(p) \neq 0$, entonces el primer término domina el error, es decir $e_{n+1} \approx e_n$, y en este caso el método sería de primer orden.

Si $g'(p) = 0$ y $g''(p) \neq 0$, el segundo término de la serie 2.2 es el que domina el error y por lo tanto, $e_{n+1} \approx e_n^2$ y el método sería de segundo orden. Ahora, si $g'(p) = g''(p) = 0$ y $g'''(p) \neq 0$, entonces es el tercer término el que domina y el método sería de tercer orden, puesto que $e_{n+1} \approx e_n^3$.

2.6. Orden del método de Newton-Raphson

Para $f(x)$ una función continua, con $f(c) = 0$ para $c \in \mathbb{R}$ y $f'(c) \neq 0$, si se aplica el método de Newton-Raphson para aproximar c, se tiene que

$$\begin{cases} p_0 \\ p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Si se observa de manera detallada el método de Newton-Raphson, se puede determinar que su forma corresponde a un esquema de punto fijo, donde $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Entonces se podría asegurar que la convergencia es lineal, pero

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2},$$

cuyo valor en la raíz c de $f(x)$, que es el punto fijo de $g(x)$, es:

$$g'(c) = 1 - \frac{(f'(c))^2 - f(c)f''(c)}{(f'(c))^2} = \frac{f(c)f''(c)}{(f'(c))^2} = 0.$$

Luego el método parece ser de orden dos, pero todavía no es posible asegurar lo anterior hasta verificar el valor de la segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{(f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x))(f'(x))^2 - 2f'(x)f''(x)f(x)f''(x)}{(f'(x))^4}.$$

Al evaluar en c se desprende que

$$g''(c) = \frac{(f'(c)f''(c) + f(c)f'''(c))(f'(c))^2 - 2f'(c)f''(c)f(c)f''(c)}{(f'(c))^4} = \frac{f''(c)}{f'(c)},$$

de donde si $f''(c) \neq 0$, entonces $g''(c) \neq 0$ y el método de Newton-Raphson sería de segundo orden.


Voigtländer
Landschaft
Gruppe
Porträt
Anastigmat Voigtar
Voigtländer Braunschweig
Voigtländer
BRILLANT