Capítulo 1

Errores y aproximaciones

1.1. Introducción

Las cantidades numéricas que se trabajan en ingeniería y ciencias, provienen de dos fuentes principalmente, de mediciones y obtenidas por procesos de cálculos matemáticos.

En la primera fuente, se debe considerar que un proceso de medición nunca arroja el valor verdadero de la medida, pues las mediciones se hacen con instrumentos que se encuentran limitados por la división más pequeña de la unidad de medida en la que vienen graduados, obteniendo entonces una aproximación al valor verdadero hasta la incertidumbre del instrumento.

En el segundo caso, las operaciones aritméticas usualmente se ejecutan en un computador o una calculadora, y la limitación de espacio de estos dispositivos lleva a que algunas cifras no se puedan representar correctamente. En dicho caso, lo máximo que se puede esperar es una aproximación de los valores verdaderos. La situación se agrava si estas aproximaciones se siguen utilizando en posteriores cálculos. De otro lado, muchas veces resulta imposible[1] siquiera expresar en términos algebraicos soluciones a ciertas ecuaciones, inclusive polinomiales. En esta situación, no quedaría otro remedio que buscar aproximaciones.

Con lo anterior, es claro que el trabajo de ingeniería y ciencias se encuentra inevitablemente sujeto a error, y por tanto el tema de cuantificación de errores es de atención prioritaria en dichas áreas. Hay dos maneras clásicas de medir errores, mediante el *error absoluto* y el *error relativo*. Para definir lo anterior, suponer que $\bar{x}$ es una aproximación al valor verdadero x. El error absoluto es $\varepsilon = |x - \bar{x}|$, mientras que el error relativo es $\varepsilon_r = \dfrac{|x - \bar{x}|}{|x|}$ si $x \neq 0$, donde es necesario resaltar que el error absoluto puede ser algunas veces engañoso, pues no tiene en consideración el tamaño del valor, como si es el caso del error relativo.

[1] Es de resaltar el teorema de Abel-Ruffini al respecto.

Como se verá en posteriores capítulos, aunque no siempre es posible contar con el valor verdadero de una magnitud, con los procedimientos a trabajar se pueden ir encontrando aproximaciones que en cada paso resulten mejores, y por tanto, la distancia entre una aproximación y la anterior es cada vez menor. Lo anterior se puede ir visualizando a través del *error aproximado*, definido como $\varepsilon_{ap} = |x_{\text{actual}} - x_{\text{anterior}}|$. En la sección 1.2 se usa el concepto de error verdadero para formalizar lo que se entenderá como cifras significativas. De igual manera, en este capítulo, se incluye material que permite analizar si unas aproximaciones sucesivas resultantes de un método son convergentes y cuantificar la rapidez con que lo hacen. También será posible analizar comportamientos asintóticos de funciones y caracterizar términos de errores.

1.2. Cifras significativas

Considerar una región rectangular que tiene 20.5 cm de largo por 14.3 cm de ancho. Se requiere la medida del área de la región en centímetros cuadrados.

La solución del problema parece inmediata, ya que basta con multiplicar las dos mediciones para obtener 293.15 cm^2. Sin embargo, se encuentra en duda la validez de dicho resultado, pues no se ha considerado que las cantidades en ingeniería, aparte del valor de la medición, tienen implícita la incertidumbre asociada al instrumento de medición.

Volviendo al problema inicial, al considerar el valor 20.5 cm, se deduce que el instrumento con que fue tomada la medida tiene graduación en centímetros, y que cada centímetro está dividido en diez partes, por lo que cualquier medida con el instrumento, tendrá una precisión de a lo más una décima de centímetro.

En la figura 1.1, diferentes personas reportarían sin dudar los primeros dos dígitos, a saber el dos y el cero, que en este contexto se llamarán *dígitos confiables*. El tercero podría tener libre interpretación, pues algunas personas podrían decir que se trata de un seis, y otros de un cinco. En esta situación es preferible dejar la medida hasta la raya de división que parezca más cercana, en este caso la del cinco. Se tendría entonces la tranquilidad que la medición tiene una incertidumbre de una décima de centímetro, y se entenderá que la medida de 20.5 cm es en realidad una cifra entre 20.4 cm y 20.6 cm con el tercer dígito llamado *dígito de incertidumbre*. La cantidad de dígitos confiables más otro con incertidumbre, son las *cifras significativas* de una medición. Con lo anterior, las medidas 20.5 y 14.3 cm, tienen cada una tres cifras significativas.

Nota: también es posible dejar el cinco como una cifra confiable y aventurarse a tomar la mitad de la décima de centímetro, división más pequeña, como el dígito con incertidumbre. No es extraño entonces que alguien pueda reportar la misma medida como 20.55 cm. Lo anterior dejaría tres dígitos confiables y un último con incertidumbre. Sin embargo, para efectos prácticos, en este texto se trabaja como se indica con anterioridad.

Volviendo al ejemplo, notar que, al multiplicar las dos medidas para calcular el área, se obtiene un resultado (293.15 cm^2) con cinco cifras, lo que lleva a preguntarse ¿cómo es posible que trabajando con medidas que tienen tres cifras significativas, se logre una con

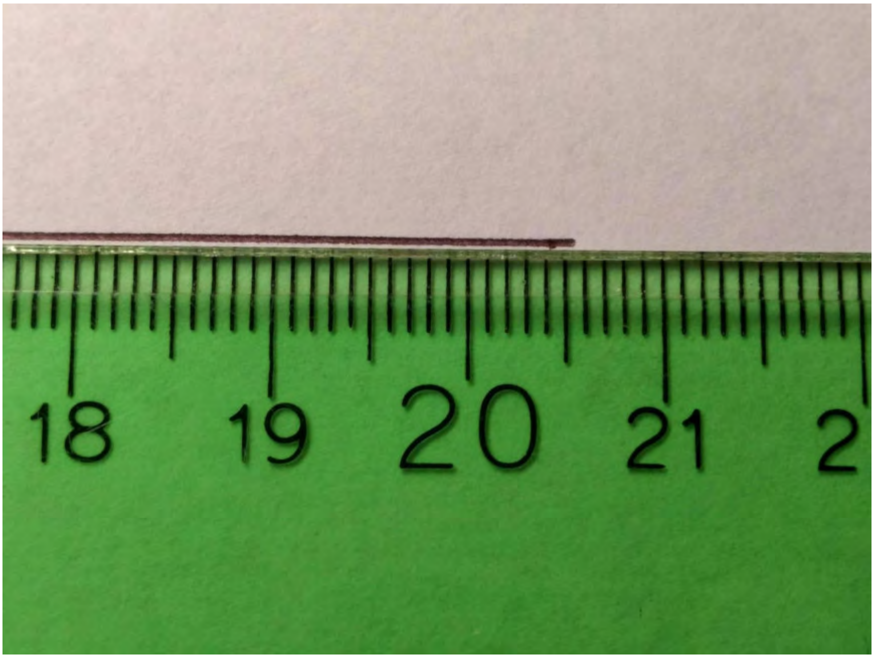

Figura 1.1: medida tomada con una regla casera graduada en centímetros y cada centímetro divido en diez partes.

cinco cifras significativas? A continuación, se tienen reglas que orientan lo que se debe hacer cuando se hacen operaciones con cifras significativas, y que responden al anterior interrogante.

Regla 1: cuando se multipliquen o dividan cifras significativas, el resultado debe tener tantas cifras como el factor que tenga menos cifras significativas.

Regla 2: cuando se sumen o resten cifras significativas, el resultado debe tener tantas cifras como el término que tenga menos cifras significativas.

Por lo tanto, de acuerdo a la primera regla, el resultado correcto del área es 293 cm^2. Es normal que la última cifra se redondee observando la cifra de la derecha. En este caso, como a la derecha del tres hay un uno, entonces sigue como tres, si hubiera un cinco o mayor, el tres se eleva en una unidad y quedaría como un cuatro.

De acuerdo a los instrumentos de medida, las características del sistema o propósitos de la información, el ingeniero debe hacer un estimativo del número de cifras significativas que requieren sus cálculos. Con lo anterior, es posible tener una cota del error absoluto ($\varepsilon = |x - \bar{x}|$) con base en el número n de cifras significativas mediante la expresión

$$\varepsilon = \left(0.5 \times 10^{2-n}\right) \%.$$

Ejercicios 1

1. Calcular el volumen en pies cúbicos de una habitación de 2.6 m de profundidad, 3.8 m de ancho, y 2.6 m de altura.

2. Se toma el pulso de una persona y se observa que 110 pulsaciones tardan 115.6 segundos. Calcular la duración de un pulso o latido.

3. Un caracol se mueve con una rapidez de 5.12 furlong por quincena. Considerando que un furlong equivale a 220 yardas, que un metro son 1.094 yardas y que una quincena son 14 días, expresar la rapidez en metros sobre segundos.

4. Una región rectangular mide 20.5 cm de largo por 14.3 cm de ancho. Calcular su perímetro.

5. Un cilindro de aluminio tiene un diámetro de 2.13 cm y 15.3 cm de longitud. Calcular a), su volumen en centímetros cúbicos, b), su masa en gramos (consultar la densidad del aluminio en una tabla) y c), la superficie total en centímetros cuadrados.

1.3. Error de truncamiento

Es conocido que números como π, e, $\sqrt{2}$ tienen un desarrollo decimal infinito y no periódico, y por tanto, es muy difícil para la mayoría de las personas retener en su memoria tan solo unas cuantas cifras decimales de ellos. Sin embargo, hay formas metódicas de obtener aproximaciones tan buenas como se quieran a estos números. Una de las más famosas es a través del uso de series de Taylor. Para ello, si se conoce una función f y todas sus derivadas en un punto c, entonces el valor de la función en otro punto x, se puede obtener usando la serie de potencias

$$f(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}\,(x-c)^3 + \cdots\,, \tag{1.1}$$

donde se requiere aparte de la existencia de las derivadas en el intervalo abierto entre x y c, también de la continuidad de f y sus derivadas en el intervalo cerrado entre x y c.

Si se empieza a evaluar el primer término de la serie, luego el segundo, el tercero y así sucesivamente, es posible que en situaciones prácticas llegue el momento en que se debe abandonar el cálculo de términos y por tanto truncar la serie. En este momento es deseable contar con una aproximación que pueda brindar el error cometido hasta el momento. Al cortar la serie en el término $n+1$, se logra una aproximación al valor de la función en x dada por el *polinomio de Taylor* $P_n(x)$ de orden n:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n\,.$$

Notar que, si se corta la serie en el primer término, se tiene la aproximación a orden cero, en el segundo, aproximación de primer orden y así sucesivamente. Lo interesante es que al hacer aproximaciones con la serie de Taylor, hay un indicio del error que se comete, pues se entenderá dicho error como proveniente de los términos que no se tuvieron en cuenta. En dicho caso, el error estaría dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(c)}{(n+2)!}(x-c)^{n+2} + \cdots$$

Usando el teorema del valor medio, es posible reescribir la expresión anterior como

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \tag{1.2}$$

donde ξ se encuentra entre x y c. El resultado 1.2 se conoce como *error de truncamiento*, o término de error en forma de Lagrange. Se debe considerar que, aunque se garantiza la existencia de ξ, no se tiene, en general, una forma explícita de encontrar dicho valor. Con los elementos anteriores, la serie de Taylor 1.1 se suele escribir como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \tag{1.3}$$

Nota: en otras situaciones o contextos, es también conveniente trabajar con la *forma integral* del error de truncamiento o término de error, dada por

$$R_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt. \tag{1.4}$$

Ejemplo 1. Calcular la serie de Taylor de $f(x) = \sin x$ alrededor de $c = 0$, el polinomio de orden dos, orden tres, y los correspondientes errores de truncamiento.

Solución: se comienza calculando los valores de la función y sus derivadas en $x = 0$:

- $f(0) = \sin x\Big|_{x=0} = 0.$
- $f'(0) = \cos x\Big|_{x=0} = 1.$
- $f''(0) = -\sin x\Big|_{x=0} = 0.$
- $f'''(0) = -\cos x\Big|_{x=0} = -1.$
- $f^{(4)}(0) = \sin x\Big|_{x=0} = 0.$

Para $f^{(5)}(0)$ en adelante, se tienen repeticiones de valores. Al reemplazar en la expresión 1.1 se obtiene la serie de Taylor de $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}.$$

Para obtener la aproximación de segundo orden, se corta la serie en el tercer término. Luego

$$P_2(x) = x.$$

Notar que el primer y tercer término de la serie valen cero y que el correspondiente término de error es

$$R_2(x) = -\frac{\cos \xi}{6} x^3,$$

donde ξ se encuentra entre cero y x. De forma similar, la aproximación de tercer orden es $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ y el término de error es $R_3(x) = \frac{\sin \xi}{24} x^4$ donde ξ, al igual que antes, se encuentra entre cero y x. ♢

Ejercicios 2

1. Calcular las series de Taylor alrededor de $c = 0$ para las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \ln(x + 1)$.
   b) $f(x) = \tan^{-1} x$.
   c) $f(x) = \cos x$.
   d) $f(x) = e^x$.
   e) $f(x) = \ln(1 - x)$.
   f) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
   g) $f(x) = \sinh x$.
   h) $f(x) = \cosh x$.
   i) $f(x) = x^2 e^{-3}$.
   j) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$
2. Calcular la serie de Taylor alrededor de $c = 3$ para $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
3. Calcular la serie de Taylor alrededor de $c = 2$ para $f(x) = -\ln x$.
4. Calcular la serie de Taylor alrededor de $c = 5$ para $f(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 + x - 1$.
5. Obtener una aproximación a π usando el polinomio de tercer orden de Taylor de arcotangente y obtener el correspondiente error de truncamiento. Calcular la serie alrededor de $c = 0$.
6. Obtener un polinomio de grado tres que aproxime a e y calcular el error de truncamiento. Usar un desarrollo en serie de e^x alrededor de $c = 0$.

7. Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Obtener el polinomio de cuarto orden para estimar el valor de $f(-0.25)$ y calcular el error de truncamiento. Calcular la serie alrededor de $c = 0$.

8. Obtener una aproximación a $\sqrt{2}$ con el polinomio de Taylor de cuarto orden de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Calcular la serie alrededor de $c = \dfrac{1}{2}$.

1.4. Error de redondeo

Como se mencionó en la sección 1.3, hay aparición de error por la dificultad de las máquinas para representar ciertos números reales, particularmente números irracionales. En computación, debido a la forma en que los computadores almacenan los números reales usando *representación de punto flotante*, pueden ocurrir errores adicionales, en este caso de *redondeo*, debido a la misma naturaleza de dicha representación en que se usan aproximaciones para representar números reales.

Con las consideraciones anteriores, se define el error total como la suma del error de truncamiento con el error de redondeo, de donde en la práctica en ciencias e ingeniería, sería natural el querer minimizar el error total. Lo anterior puede llevar a una paradoja, pues si se quiere más precisión en las cifras, de acuerdo al error de truncamiento, se debe tomar más términos en las series de Taylor. Pero esto hace que se tenga que hacer más operaciones con números que ya son aproximaciones en las máquinas de cómputo, lo que lleva a que el error de redondeo pueda ser importante.

Al parecer, tener más operaciones tiende a incrementar el error de redondeo, pero menos operaciones lleva a mayor error de truncamiento. Por lo tanto, en el trabajo en ciencias e ingeniería, se debe balancear y encontrar un punto de equilibrio en el que los procedimientos lleven a resultados lo suficientemente satisfactorios, de tal forma que se puedan calcular con el menor número de pasos u operaciones posibles sin sacrificar la precisión y exactitud de los resultados.

1.5. Orden de convergencia

Cuando se utiliza un método iterativo, como los desarrollados en el capítulo 2, es útil conocer la velocidad de convergencia, constituyendo lo anterior un criterio para determinar la eficiencia de un procedimiento en la solución de un problema particular. Para entender este concepto y desarrollarlo en algunos casos especiales, es necesario presentar algunas definiciones.

Definición 1. *Sea $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión convergente, p el límite de la sucesión, $p_n \neq p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si existen λ y α números reales positivos tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda,$$

entonces se dice que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión que converge a* p *con orden* α *y constante de error asintótico* λ.

Ejemplo 2. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ converge a cero con orden uno.

Solución: para comprobar que la sucesión $p_n = \frac{1}{n}$ converge a 0 con orden uno es necesario demostrar que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^1}$$

existe y es un número real positivo. En este caso,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{n+1} - 0\right|}{\left|\frac{1}{n} - 0\right|^1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

y por tanto la convergencia de $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ es de orden uno. $\diamondsuit$

Si el orden de convergencia de una sucesión es $\alpha = 1$, entonces se dirá que la sucesión es linealmente convergente, mientras que en el caso $\alpha = 2$, se habla de convergencia cuadrática. Como se podría esperar, entre más alto sea el orden de un método, debería presentarse una convergencia más rápida. Aunque las sucesiones de convergencia cuadrática alcanzan con mayor rapidez una precisión deseada en comparación con sucesiones de orden lineal, la mayoría de esquemas iterativos del capítulo 2 tienen una convergencia lineal como se verá en su momento.

1.6. Notación O

La notación O es usada ampliamente para describir el comportamiento asintótico de funciones o sucesiones. En el contexto de los métodos numéricos, se usa para describir términos de error como se verá en el capítulo 4. La notación O también es usada en el contexto de las ciencias de la computación para clasificar algoritmos de acuerdo a su complejidad. A continuación, se tiene la definición formal.

Definición 2. *Sean* $f(x)$ *y* $g(x)$ *funciones reales. Decimos que* $f(x) = O(g(x))$ *cuando* $x \to \infty$ *si existe un* x_0 *y una constante* M *tal que* $|f(x)| \leq Mg(x)$ *para* $x \geq x_0$. *Decimos entonces que* $|f|$ *se encuentra dominada asintóticamente por arriba mediante la función* g.

Esta definición también se puede adaptar cuando $x \to a$, *en cuyo caso decimos que* $f(x) = O(g(x))$ *cuando* $x \to a$ *si existe un* δ *y una constante* M *tal que* $|f(x)| \leq Mg(x)$ *para* $0 < |x - a| < \delta$.

En el capítulo 4 se usará el caso cuando $x \to 0$*, donde la notación será simplemente* $f(x) = O(g(x))$*, omitiendo la parte de* $x \to 0$*.*

Ejemplo 3. $e^x - 1 - x = O\big(x^2\big)$ o equivalentemente $e^x = 1 + x + O\big(x^2\big)$

Solución: para comprobar que $e^x - 1 - x = O\big(x^2\big)$, se usa la expansión en serie de Taylor $e^x = 1 + x + e^{\xi}\dfrac{x^2}{2}$ donde ξ se encuentra entre 0 y x. En dicho caso, $|e^x - 1 - x| = \dfrac{e^{\xi}}{2}x^2$, y dado que $x \to 0$, se puede asumir que $e^{\xi} \leq 1$ y por tanto $|e^x - 1 - x| \leq \dfrac{1}{2}x^2$ para x suficientemente pequeño, de donde se sigue el resultado. $\diamondsuit$

Ejemplo 4. Usando argumentos similares al anterior, se tiene que $\sin x = x + O\big(x^3\big)$, hecho que se usa frecuentemente en la solución al problema del péndulo simple.