CAPÍTULO V

Formulación del Modelo de Simulación

Con el fin de desarrollar en esta fase el Modelo de Forrester o de Flujo, se utiliza la Dinámica de Sistemas como una metodología para el estudio y manejo de sistemas complejos de retroalimentación. Una de las características de esta disciplina es el uso del computador para realizar simulaciones, lo que ofrece la posibilidad de estudiar el comportamiento y las consecuencias de las múltiples interacciones de los elementos de un sistema a través del tiempo.

Esto la hace muy útil para el estudio de fenómenos sociales, ya que en ellos están implicados una gran cantidad de elementos e interrelaciones donde la presencia de no linealidades determina el comportamiento y dificulta una solución analítica. Además, los efectos de las políticas y acciones ejercidas sobre estos sistemas se manifiestan en horizontes temporales diferentes y dilatados (Morlán, 2010: 80).

Los modelos matemáticos dan origen a ecuaciones diferenciales de primer orden, a la representación matemática y a los algoritmos de la metodología Dinámica de Sistemas y del lenguaje Vensim.

Modelado de Sistemas Dinámicos

En esta fase se utilizó la metodología para el modelado de Sistemas Dinámicos. Se tradujo el Modelo Conceptual a un Modelo de Flujo, utilizando el símil hidrodinámico presentado por Forrester y perfeccionado por Sterman, con la finalidad de identificar las variables de nivel o acumuladores, las ecuaciones de nivel o estado, las ecuaciones de flujo, las tasas, las variables auxiliares y las constantes, en un modelo dinámico que permita simular el comportamiento del sistema.

Marco conceptual para la deducción del Modelo de Flujo o Diagrama de Forrester y de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Con la finalidad de comprender la deducción de cada ecuación diferencial del Modelo GEPI se presenta una descripción conceptual que sirvió de base para la construcción del Modelo de Flujo.

Aracil y Gordillo (1997: 18) consideran que el método de Forrester se integra directamente con la Teoría de Sistemas en la medida en que suministra una metodología para estudiar sistemas dotados de una cierta complejidad estructural, en la cual el bucle de retroalimentaciones es el bloque básico; este método utiliza tanto instrumentos de matemáticas aplicadas (los grafos y sobre todo los sistemas dinámicos) como útiles informáticos.

Por otra parte, Aracil y Gordillo (1997: 19) consideran que los modelos construidos mediante la Dinámica de Sistemas son Sistemas Dinámicos, por lo que todo el amplio y rico bagaje de conocimiento matemático que se tiene en la Teoría de Sistemas Dinámicos puede explotarse en el campo de la Dinámica de Sistemas. Esto es especialmente interesante si se considera que los modelos de Dinámica de Sistemas son normalmente sistemas no lineales, por lo que pueden presentar formas de comportamientos muy complejos, para cuyo análisis los recientes resultados de la teoría matemática de Sistemas Dinámicos no lineales resultan de gran interés, como se evidencia enseguida.

Al observar los distintos elementos que aparecen en los nodos del diagrama de influencias o modelo causal, algunos representan variaciones respecto al tiempo de otras magnitudes consideradas en ese mismo diagrama. Por ejemplo, en un diagrama genérico, la variable de flujo representa la variación con respecto al tiempo del valor de estado x.

$$\textit{Flujo} \longrightarrow \textit{Estado}$$

Esta influencia es un caso particular de otra más general que se puede expresar de la forma:

$$\frac{dx}{dt} \longrightarrow X \qquad \text{(Expresión 1)}$$

En la $\frac{dx}{dt}$ se denota la variación con respecto al tiempo de la magnitud X. Esta expresión representa una relación trivial: la variación con respecto al tiempo de X influye en el crecimiento de la propia variable X. Sin embargo, lo que interesa resaltar es la existencia, en el diagrama de influencias, de variables que representan la variación. Se puede afirmar que las estructuras tienen implícito el comportamiento del sistema.

Conviene también observar que siempre que exista una variable del tipo $\frac{dx}{dt}$ que representa la variación de una magnitud X con respecto al tiempo se tendrá una relación de influencia como la que se ve en la Expresión 1. La variable X resulta de la acumulación del cambio implícito en la variable $\frac{dx}{dt}$ variable de flujo. A las variables de estado se las conoce también, en Dinámica de Sistemas, como variables de nivel.

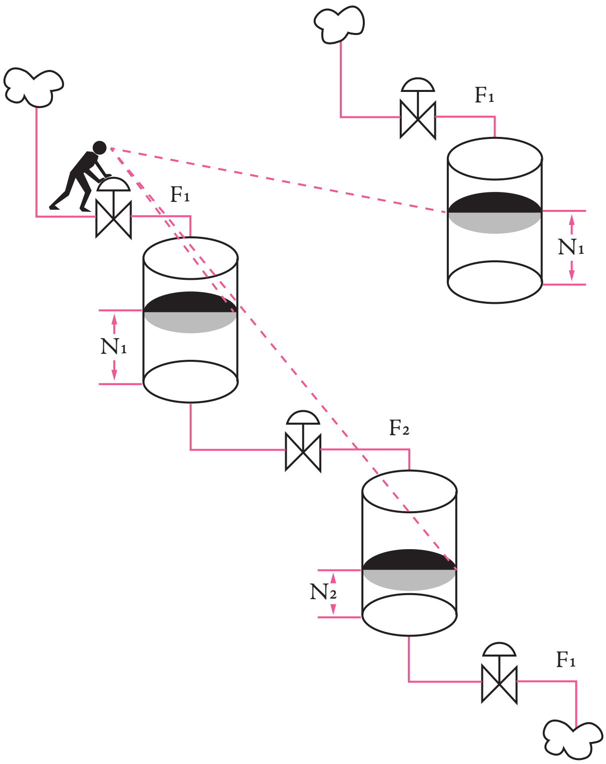
Forrester, 1961 (citado en Aracil y Gordillo, 1997: 57) postuló:

> Una clasificación de las distintas variables que aparecen en un diagrama de influencias en tres grupos sería: las variables de estado son normalmente más importantes y representan las magnitudes cuya evolución es especialmente significativa. Asociadas a cada variable de estado se encuentran una o varias variables de flujo que determinan su variación a lo largo del tiempo. Por último, las variables auxiliares constituyen las restantes variables que aparecen en el diagrama y representan pasos intermedios para la determinación de las variables de flujo a partir de las variables de estado. (Forrester, 1961, citado en Aracil y Gordillo, 1997: 57)

Las formulaciones matemáticas de los bucles de retroalimentación positiva y negativa, y del crecimiento sigmoidal, corresponden a variables de estado, variables de flujo o variables auxiliares.

Figura 7.

Símil hidrodinámico de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 58.

Una vez clasificados los elementos que aparecen en el Diagrama de Influencias en variables de estado, flujo y auxiliares se requiere obtener, a partir del diagrama de influencias o causal, lo que se conoce como el Diagrama de Forrester que es uno de los instrumentos básicos de la Dinámica de Sistemas.

En la Figura 7 se presenta gráficamente el símil hidrodinámico de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tal como lo concibió inicialmente Forrester.

Aracil y Gordillo (1997: 58-59) consideran que:

> Para ayudar a comprender el significado de las tres clases de variables conviene recurrir a un símil hidrodinámico como el mostrado en la Figura 7. En esta Figura se representan tres depósitos en los que se acumulan tres niveles . Las variaciones de los niveles vienen determinadas por las actuaciones sobre unas ciertas válvulas que regulan los caudales que alimentan a cada uno de los depósitos. La decisión sobre la apertura de estas válvulas se toma teniendo como única información los valores alcanzados por los niveles en cada uno de los depósitos, en el instante de tiempo considerado. En la Figura 46 este se representa con ayuda de un observador que teniendo como única información el conocimiento de los niveles en el resto de los depósitos determina la apertura de la válvula correspondiente. Aunque en la Figura 7 solo aparece el observador en una de las válvulas, debe considerarse que hay uno en cada una de ellas. De acuerdo con lo anterior, está claro que el valor tomado por la variable de flujo en cada instante depende exclusivamente de los valores alcanzados por los niveles en dicho instante; de forma análoga, los valores alcanzados por los niveles dependen de los valores tomados por las variables de flujo que alimentan a dichos niveles.

El símil hidrodinámico logra una forma intuitiva, apropiada para una mentalidad que busque imágenes físicas, de representar un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. En consecuencia, se ve de inmediato que al hacer ciertas simplificaciones en la Figura 7 no se hace sino representar, de forma análoga, un sistema de ecuaciones diferenciales, tales como las siguientes:

$$\frac{d\,(X_1)}{dt} = -F_1 - F_2 \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

$$\frac{d\,(X_2)}{dt} = -F_4 \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

$$\frac{d\,(X_3)}{dt} = -F_2 - -F_3 \qquad \text{(Ecuación 3)}$$

Siendo

$$F_i = f(X_1 X_2 X_3) \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \text{(Ecuación 4)}$$

Según Aracil y Gordillo (1997: 59-60):

> Estas funciones pueden ser lineales o no lineales. La determinación del valor tomado por unas variables de flujo, por ejemplo F_1, a partir de los estados X_1 X_2 X_3 , puede que sea conveniente hacerla en distintas etapas, requiriéndose por ello el establecimiento de unas variables auxiliares; por ejemplo, la función f_1 puede descomponerse en tres etapas, empleando dos variables auxiliares A_1 A_2 teniendo:
>
> $$A_1 = \varphi_1 (X_1 , X_2) \qquad \text{(Ecuación 5)}$$
>
> $$A_2 = \varphi_2 (X_1 , X_3) \qquad \text{(Ecuación 6)}$$
>
> $$F_1 = \varphi_3 (A_2) \qquad \text{(Ecuación 7)}$$
>
> En efecto
>
> $$F_1 = \varphi_3 [\varphi_2 (A_1 , X_3)] \qquad \text{(Ecuación 8)}$$
>
> $$= \varphi_3 [\varphi_2 [\varphi_1 (X_1 , X_2) X_3] \qquad \text{(Ecuación 9)}$$
>
> $$= f_1 (X_1 X_2 X_3) \qquad \text{(Ecuación 10)}$$
>
> Es decir, las variables auxiliares representan etapas intermedias en la determinación de los flujos a partir de los estados y, en último extremo, pueden ser eliminadas.

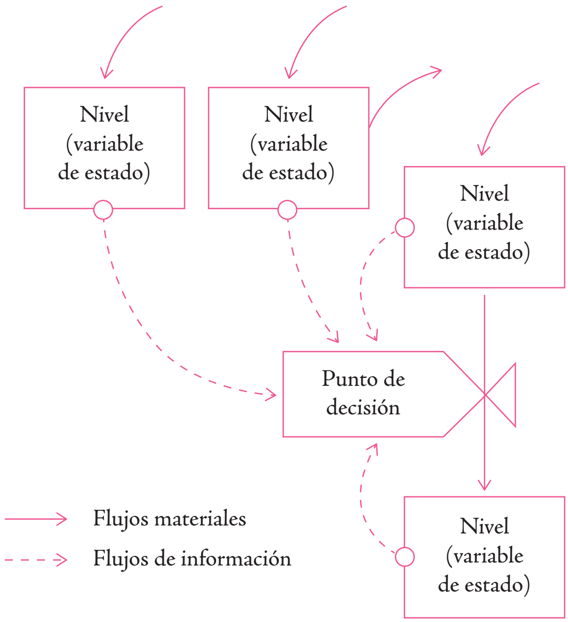
El símil hidrodinámico de la Figura 7 se puede completar con la inclusión de variables exógenas. Estas suministran información adicional y exterior que debe considerarse para decidir el valor que toman las variables de flujo F. Es decir, llamando a una variable exógena la Ecuación 4 se convertiría en:

$$F_i = f_1 (X_1 , X_2 , X_3 , E)$$

En el símil hidrodinámico se pone claramente de manifiesto que se pueden concebir dos tipos esenciales de variables: los estados y los flujos, y una clase secundaria, las variables auxiliares. Al usar esta analogía en

Figura 8.

Conexión entre las variables de nivel (de estado) y los puntos de decisión (variables de flujo)



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 60.

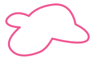
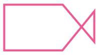
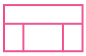
Dinámica de Sistemas, las variables que aparecen en un modelo se clasifican en variables de estado, variables de flujo y variables auxiliares. De esta manera, se consigue dar una forma intuitiva al proceso de construir un modelo que, en último extremo, no va a ser sino un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

La Figura 8 presenta un diagrama que enseña, de forma gráfica las ideas que se acaban de exponer.

En el diagrama Se emplean los símbolos que se muestran en la Figura 8 y que se explicarán posteriormente. Es necesario indicar que estos símbolos son los que inicialmente propuso Forrester, pero en la actualidad no son empleados de forma universal; estos diagramas se dibujan con cierta libertad al escoger los símbolos. En cualquier caso, el significado de

Figura 9.

Símbolos utilizados originalmente en los Diagramas de Forrester

	**Nube:** representa una fuente o un pozo; puede interpretarse como un estado que no tiene interés y es prácticamente inagotable.
	**Estado:** representa una acumulación de un flujo.
	**Flujo:** variación de un estado; representa un cambio en el estado del sistema
	**Canal de material:** canal de transmisión de una magnitud física que se conserva.
	**Canal de información:** canal de transmisión de una cierta información, que no es necesario que se conserve.
	**Variable auxiliar:** una cantidad con un cierto significado físico en el mundo real y con un tiempo de respuesta instantáneo.
	**Constante:** un elemento del modelo que no cambia de valor.
	**Retraso:** un elemento que simula retrasos en la transmisión de información material.
	**Variable éxogena:** variable cuya evolución es independiente de las del resto del sistema. Representa una acción del medio sobre el sistema.

Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo 1997: 62.

la Figura 8 es claro a primera vista, se observa cómo las variaciones de un estado son el resultado de una decisión tomada a partir de información que proviene del resto de los estados. En lo que sigue se estudiará de forma sistemática y a fondo este proceso; para ello se discuten con detalle las variables de estado de flujo y las auxiliares, así como las interconexiones que se establecen entre ellas.

En la Figura 9 se encuentran los símbolos utilizados inicialmente en los Diagramas de Forrester.

Para Aracil y Gordillo (1997:69):

> Las variables de estado o niveles constituyen aquel conjunto de variables cuya evolución es significativa para el estudio del sistema. Los estados representan magnitudes que acumulan los resultados

de acciones tomadas en el pasado. Esta función de acumulación puede asimilarse a la del nivel alcanzado por un líquido en un depósito; de ahí proviene la denominación de nivel, siguiendo el símil hidrodinámico.

La elección de los elementos que se representan por variables de estado en un modelo determinado, depende del problema específico que se esté considerando. En la elección de estas variables desempeña un papel primordial la experiencia del diseñador del modelo. Una característica común a todos los estados es que cambian lentamente en respuesta a las variaciones de otras variables.

En los Diagramas de Forrester los niveles se representan por medio de rectángulos.

A cada estado X se le puede asociar un flujo de entrada F_e y uno de salida F_s de modo que la ecuación que representa su evolución es la siguiente:

$$X(t) = X(0) + \int_0^T (F_e - F_s)\, dt$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{dX}{dt} = F_e - F_s$$

Esta ecuación se puede escribir de forma aproximada utilizando el Método de Euler de Integración Numérica:

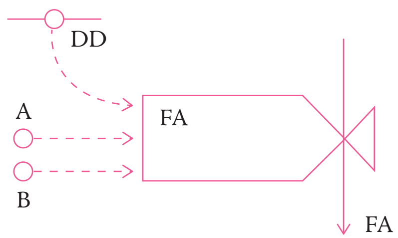
$$X(t + \Delta t) = x(t)\,[Fe(t) - Fs(t)]$$

Esta forma última de escribir la ecuación de un nivel es la que generalmente se emplea en Dinámica de Sistemas.

Las variables de flujo determinan las variaciones en los niveles del sistema. Las variables de flujo caracterizan las acciones que se toman en el sistema, las cuales quedan acumuladas en los correspondientes niveles. Las variables de flujo determinan cómo se convierte la información disponible en una acción o actuación (Aracil y Gordillo, 1997: 62).

Figura 10.

Representación de un flujo de un Diagrama de Forrester



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 63.

Debido a su naturaleza se trata de variables que no son medibles en sí, sino por los efectos que producen en los niveles con los que se están relacionando. Se representan por medio de los símbolos que se indican en la Figura 9.

Estos símbolos están inspirados en el símil hidrodinámico, según el cual las variables de flujo se pueden asociar a válvulas que regulan los caudales que alimentan determinados depósitos, cuyos niveles materializan el estado del sistema.

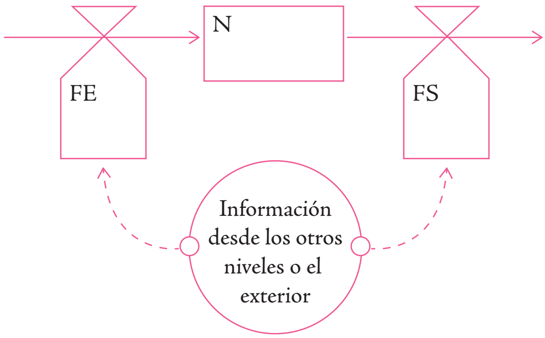
A las variables de flujo se asocian ecuaciones que definen el comportamiento del sistema. El bloque representativo de un flujo admite, como señal de entrada, la información proveniente de los niveles o de las variables auxiliares del sistema y suministra como salida el flujo que alimenta a un nivel. Por ejemplo, en la Figura 10 se tiene el bloque que representa un flujo al que se puede asociar una ecuación de la forma:

$$FA\ (t) = \frac{B\ (t) * A\ (t)}{DD}$$

Siendo A (t) y B (t) dos variables de nivel o auxiliares, las ecuaciones asociadas a una variable de flujo reciben la denominación de Ecuaciones de Flujo o Funciones de Decisión.

Figura 11.

Conexión de un nivel N a los flujos de entrada (FE) y a los flujos de salida (FS)



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 63.

La Ecuación de Flujo representa la función desarrollada por el observador del símil hidrodinámico de la Figura 10. Es decir, con la ayuda de la Ecuación de Flujo el observador calcula en cada instante la apertura de la válvula, o sea el flujo; de ahí la denominación de función de decisión.

En todo nivel se asocia al menos una variable de flujo, lo que gráficamente se puede representar utilizando algunos de los símbolos de la Figura 10.

En la Figura 11 se muestra gráficamente la conexión de un nivel N a los flujos de entrada FE y a los flujos de salida FS de un sistema.

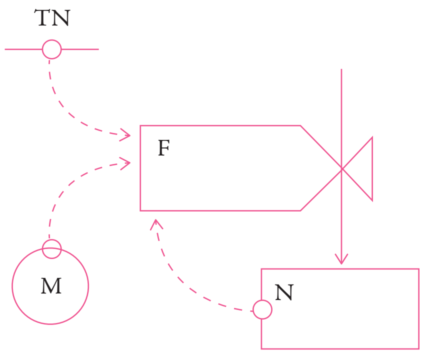
Una forma que toma muy frecuentemente la ecuación de flujo es la que se representa en la Figura 11, la ecuación de flujo correspondiente es la siguiente:

$$F(t) = TN * M(t) * N(t)$$

En donde TN es el flujo normal y M es lo que se denomina un multiplicador del flujo normal. Si M (t) = 1 se tiene una situación neutral en la que F (t) = TN*N (t), es decir, el flujo es una fracción constante y normal

Figura 12.

Representación en un Diagrama de Forrester de un flujo F cuyo valor viene dado por una tasa normal TN afectada por un multiplicador M



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 63.

del nivel. Por ejemplo, el flujo de nacimientos es igual a la tasa normal de nacimientos multiplicada por el nivel de la población.

El multiplicador M (t) refleja el efecto de otros factores sobre la variable de nivel en cuestión. El multiplicador tiene la forma:

$$M(t) = M_1[V_1(t)] * M_2[V_2(t)] \ldots M_k[V_k(t)]$$

En la Figura 12 se representa un Diagrama de Forrester de un flujo donde el valor viene dado por una tasa normal TN afectada por un multiplicador M.

En donde cada factor $M_i[V_i(t)]$ es una función no lineal de una variable V_i la cual puede ser un nivel o una variable auxiliar. Los multiplicadores M_i son tales que para considerar lo normal de la variable V_i toman valor 1 en la Figura 12 en la cual se tienen dos formas típicas que toman los multiplicadores M_i.

Las decisiones que aparecen en una Ecuación de Flujo pueden ser abiertas, si implican la intervención de un agente externo al sistema, o implícitas si están completamente determinadas por las variables internas al sistema, es decir, por los niveles.

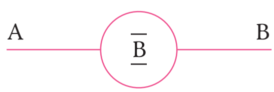
Las variables de flujo tienen como entradas, exclusivamente, niveles y variables auxiliares. Es decir, dos variables de flujo no pueden conectarse entre sí. Siguiendo el símil hidrodinámico es fácil concebir cómo la decisión respecto a la apertura de la válvula, que alimenta a un cierto nivel, se toma exclusivamente en función de los valores de los otros niveles; y cómo una variable de nivel no puede influir directamente en otra variable de nivel, sino a través del flujo que proporciona la primera (Aracil y Gordillo, 1997: 64).

La evolución del sistema en el tiempo comporta variaciones en los distintos niveles. Estas variaciones se deben no solo a la acción de factores externos (variaciones exógenas), sino -y sobre todo- a decisiones en un sentido amplio tomadas en el interior del sistema, que se interpretan con la ayuda de las funciones de decisión asociadas a las variables de flujo. Esto significa que el sistema genera su propio comportamiento y existen límites para el mismo.

Las variables auxiliares representan pasos o etapas en los que se descompone el cálculo de una variable de flujo a partir de los valores tomados por los estados. Se representan por medio de círculos como los que aparecen en la Figura 12.

Las variables auxiliares unen los canales de información entre las variables de estado y las de flujo; en realidad, son parte de las variables de flujo. Sin embargo, se distinguen de ellas en la medida en que tengan un significado real por sí mismas o sencillamente porque hacen más fácil la comprensión de las Ecuaciones de Flujo.

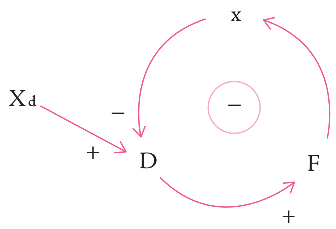
Las variables auxiliares se pueden emplear para representar las no-linealidades que aparecen en el sistema.



Si las variables A y B están ligadas por una expresión de la forma B=f(A) en donde f(A) es una función no lineal, entonces se utiliza el sím-

Figura 13.

Elementos básicos de un bucle de retroalimentación negativa elemental



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 29.

bolo como el empleado para las variables auxiliares. Es habitual que estas funciones no lineales se den mediante tablas de puntos, de modo que la función se completa por interpolación entre ellos. Por eso es frecuente referirse a estas funciones con el nombre de Tablas.

Bucle de retroalimentación negativa

En la Figura 13 se muestra un bucle de retroalimentación negativa elemental.

Los elementos básicos de este bucle son:

- El estado del sistema X.
- La acción o Flujo F.
- La discrepancia D.
- El objetivo o estado deseado XD.

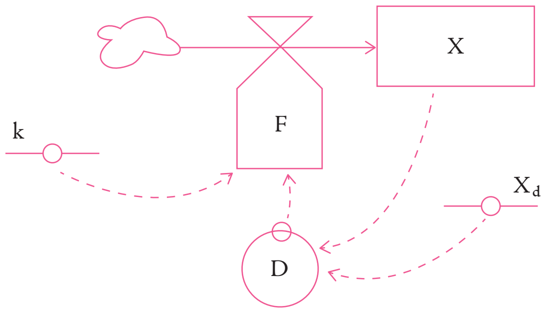
Con el fin de introducir una hipótesis dinámica en el sistema se supone que el estado representa la acumulación de acciones pasadas.

Se asume, además, que la relación entre el estado X y la acción F viene dada por una ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} = F \qquad \text{(Ecuación 11)}$$

Figura 14:

Diagrama de Forrester de un sistema elemental de retroalimentación negativa



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 65.

Por lo tanto, como el estado es la acumulación de acciones pasadas se puede escribir:

$$x = \int_0^t F\,dt$$

Los restantes elementos de los bucles vienen dados por las ecuaciones:

$$F = k \,.\, D$$
$$D = x_d - x$$

Al sustituir la ecuación (12) en (11) e integrando la ecuación se obtiene:

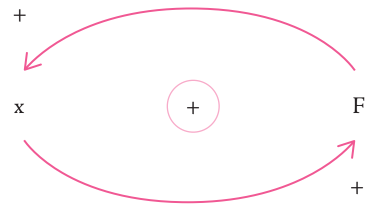
$$x\,(t) = x_d + (x(0) - x_d) \,.\, e^{-kt}$$

Que representa la evolución temporal de la variable de estado. En el Diagrama de Forrester esta retroalimentación negativa viene dada por el grafo que se presenta en la Figura 14.

El bucle de retroalimentación negativa permite ensayar con diferentes parámetros de (x_0 , x_d , k).

Figura 15.

Elementos básicos de un bucle de retroalimentación positiva elemental



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 33.

Bucle de retroalimentación positiva

El comportamiento que resulta de un bucle de esta naturaleza consiste en acelerar el crecimiento o el declive. Análogamente, como en el caso del bucle de retroalimentación negativa, es posible tener una formulación matemática del bucle de retroalimentación positiva en su caso más elemental. Los elementos básicos de esta formulación son:

- El estado del sistema X, Y.
- La acción o Flujo F.

La Figura 15 corresponde a la representación gráfica de un bucle de retroalimentación positiva elemental.

Se procede de forma análoga al caso de un bucle de retroalimentación negativa y se adopta la hipótesis de una relación entre el estado y la acción de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = F \qquad \text{(Ecuación 13)}$$

Es decir:

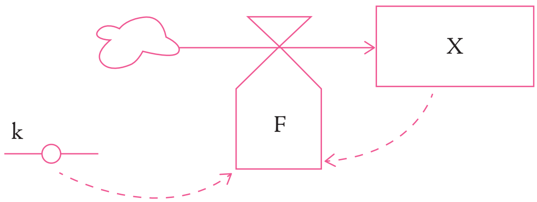
$$x = \int_0^t F\, dt$$

Se asume que la acción es proporcional al estado:

$$F = k \, . \, x \qquad \text{(Ecuación 14)}$$

Figura 16:

Diagrama de Forrester de un sistema elemental de retroalimentación positiva



Tomado de *Dinámica de Sistemas* por Aracil y Gordillo, 1997: 64.

Y sustituyendo la Ecuación 14 en la Ecuación 13 e integrando se obtiene:

$$x\,(t) = x\,(0)\,.\,e^{kt}$$

Que representa la evolución temporal de la variable de estado.

En la Figura 16 se muestra el Diagrama de Forrester de un sistema elemental de retroalimentación positiva.

Una ligera variación de este modelo aplicado en los sistemas logísticos es suponer que, además de incrementarse un inventario con la producción, al mismo tiempo se reduce debido a los pedidos tramitados. Sea m el número de unidades por unidad de tiempo de pedidos facturados. Entonces el modelo vendrá dado por:

$$x\,(t) = x\,(0)\,.\,e^{kt} - \mathrm{m};\ x\,(0) = x_0$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta haciendo uso del método de variables separadas. Se demuestra que la solución es:

$$x\,(t) = \frac{\mathrm{m} + (kx_0 - m)\,e^{\,kt}}{k}$$