El problema de Cauchy asociado a la ecuación no lineal de Schrödinger forzada paramétricamente

Cauchy's Problem Linked to Schrödinger's Non-linear Equation and Parametrically Forced

Luisa Fernanda Martínez Rojas*

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas,
Institución Universitaria Politécnico Grancolombiano,
Bogotá, Colombia.

Fecha de entrega: 9 de marzo de 2015
Fecha de evaluación: 19 de mayo de 2015
Fecha de aprobación: 24 de mayo de 2015

Resumen El propósito de este trabajo es abordar el *buen planteamiento* en los espacios de Sobolev $H^1(\mathbb{R}), H^2(\mathbb{R})$ del problema de Cauchy, asociado a la ecuación lineal de Schrödinger, forzada paramétricamente para modelar fenémenos físicos que se presentan en óptica.

Abstract In this work we deal the local and global wellposedness in the Sobolev spaces $H^1(\mathbb{R}), H^2(\mathbb{R})$ of the Cauchy problem associated to equation, which is a disturbance in the cubic Schrödinger equation and model phenomena that occur in optics.

Palabras Clave: Problema de Cauchy, espacios de Sobolev, ecuación lineal de Schrödinger, ecuación cúbica de Schrödinger, locamente bien planteado, globalmente bien planteado.

Keywords: Cauchy Problem, Sobolev spaces, lineal Schrödinger equation, Cubic Schrödinger equation, Locallly wellposedness, Globally wellposedness.

* lfmartinezr@poligran.edu.co

1. Introducción

En este artículo, trataremos el *buen planteamiento* local y global en los casos periódico y no periódico de la ecuación

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + (i-a)u - \gamma\bar{u} = 0, \tag{1}$$

que es una perturbación de la ecuación de Schrödinger cúbica y modela fenómenos presentes en óptica, especialmente en el oscilador óptico paramétrico. Para mayor información a este respecto vea ([1], [5], [6]) y las referencias allí contenidas.

Específicamente se estudiará el problema de valor inicial

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u + (i-a)u - \gamma\bar{u} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{2}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$. Con el fin de tratar el *buen planteamiento* de (2), se usará una ecuación integral equivalente y el teorema del punto fijo de Banach, lo cual permitirá obtener el buen planteamiento local en $H^s(\mathbb{R})$, para $s > 1/2$. Posteriormente se probará que dicho problema es globalmente bien planteado en $H^1(\mathbb{R})$.

Siguiendo las ideas de Kenig-Ponce-Vega ([4]) se probará que este problema es localmente bien planteado en $L^2(\mathbb{R})$, y a partir de una estimativa *a priori* se probará que este problema es globalmente bien planteado en $L^2(\mathbb{R})$.

2. La ecuación lineal en H^s, $s \geq \frac{1}{2}$

En esta sección, se analizará el problema de Cauchy asociado a la parte lineal de la ecuación (1) tanto en el caso periódico como en el no periódico. Es decir, se considerará el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{i\partial_x^2 u}{2}, \\ u(0) &= \varphi \in H^s, \end{aligned} \tag{3}$$

dónde, $x \in \mathbb{R}$ o $x \in \mathbb{T}$, cuya solución viene dada por

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi = \left(e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}\widehat{\varphi}\right)^{\vee} = e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2}\varphi. \tag{4}$$

En lo que resta de esta sección, el artículo se dedica a tratar con el caso no periódico pues el caso periódico es semejante, salvo por pequeñas modificaciones.

Teorema 1 *La aplicación $t \in [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{V}(t) \in B(H^s)$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro.*

Demostración. Este resultado es consecuencia de:

1. Como,

$$\|\mathbb{V}(t)\phi\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^s \left| e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}\widehat{\phi}\right|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^s \left|\widehat{\phi}\right|^2 d\xi = \|\phi\|_s^2$$

para toda $\phi \in H^s$ y toda $t \in \mathbb{R}$ y por tanto, se concluye que $\mathbb{V}(t) \in B(H^s)$ y que $\mathbb{V}$ es una isometría. Además, $\mathbb{V}$ es sobreyectiva para todo $t \in \mathbb{R}$; en efecto, si $\varphi \in H^s$ se tiene que $\phi = e^{\frac{-i}{2}\partial_x^2}\varphi \in H^s$ por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\phi &= e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2}\left(e^{\frac{-i}{2}t\partial_x^2}\varphi\right) \\
&= e^{\frac{i}{2}t\partial_x^2}\left[\left(e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}\widehat{\varphi}\right)^{\vee}\right] \\
&= \left[e^{\frac{-i}{2}t\xi^2}e^{\frac{i}{2}t\xi^2}\hat{\varphi}\right]^{\vee} \\
&= \varphi
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que $\mathbb{V}(t)$ es unitario para cada $t \in \mathbb{R}$

2. Es claro que $\mathbb{V}(0) = \phi$ para todo $\phi \in H^s$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(t+w)\varphi &= \left[e^{((t+w)(\frac{-i}{2}\xi^2))}\hat{\varphi}\right]^{\vee} \\
&= \left[e^{-t\frac{i}{2}\xi^2}e^{-w\frac{i}{2}\xi^2}\hat{\varphi}\right]^{\vee} \\
&= \mathbb{V}(t)[\mathbb{V}(w)\varphi]
\end{aligned}$$

para todo t, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\varphi \in H^s$

4. Como,

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\frac{ti}{2}\partial_x^2}\phi - e^{\frac{iw}{2}\partial_x^2}\phi\right\|_s^2 &= \left\|(e^{\frac{-it}{2}\xi^2}\hat{\phi})^{\vee} - (e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}\hat{\phi})^{\vee}\right\|_s^2 \\
&= \left\|\ [\ e^{\frac{-it}{2}\xi^2}\hat{\phi} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}\hat{\phi}\ ]^{\vee}\right\|_s^2 \\
&= \left\|\ [\ (e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2})\hat{\phi}\ ]^{\vee}\right\|_s^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^s\left|(e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2})\hat{\phi}\right|^2 d\xi \\
&\leq 4||\phi||_s^2,
\end{aligned}$$

para todo t, $w \in \mathbb{R}$, y toda $\phi \in H^s$, y que $\lim_{t\to w}\left(e^{\frac{-it}{2}\xi^2} - e^{\frac{-iw}{2}\xi^2}\right) = 0$, el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue permite concluir que $\left\|e^{\frac{ti}{2}\partial_x^2}\phi - e^{\frac{wi}{2}\partial_x^2}\phi\right\|_s^2 \to 0$ si $t \to w$.

Así que 1, 2, 3 y 4 implican que $\mathbb{V}$ es un grupo unitario fuertemente continuo a un parámetro.

Teorema 2 *Sea u dada por (4) es la única solución de (3). Es decir, $u \in C([0,T]; H^s)$ es la única que satisface:*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\frac{i}{2}\partial_x^2 u(t)\right\|_{s-2}=0. \tag{5}$$

Demostración. Sea $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\frac{i}{2}\partial_x^2 u(t)\right\|_{s-2}^2\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}\left|\frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2(t+h)}\widehat{\varphi}-e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}\widehat{\varphi}}{h}-\left(\frac{-i\xi^2}{2}e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}\widehat{\varphi}\right)\right|^2 d\xi\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}|e^{\frac{-i}{2}\xi^2 t}|^2\left|\frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h}-1}{h}+\frac{i\xi^2}{2}\right|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Como,

$$\left|\frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h}-1}{h}\right|\leq\left|\frac{i\xi^2}{2}\right|=\frac{1}{2}\xi^2$$

tenemos que (6) es acotado por

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\frac{i}{2}\partial_x^2 u(t)\right\|_{s-2}^2\leq 4\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^2)^{s-2}|\xi^2|^2|\hat{\phi}|^2 d\xi$$

Como $\dfrac{|\xi^2|}{(1+\xi^2)^2}\leq N$, para alguna $N > 0$ y $\forall\xi\in\mathbb{R}$ la desigualdad anterior se transforma en

$$\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-\frac{i}{2}\partial_x^2 u(t)\right\|_{s-2}^2\leq 4N||\phi||_s^2 \tag{7}$$

La desigualdad (7) y $\lim\limits_{h\to 0}\left|\dfrac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h}-1}{h}+\dfrac{i}{2}\xi^2\right| = 0$ permite obtener el límite por la derecha, gracias al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, porque para el límite por la izquierda, se procede análogamente. La unicidad es consecuencia de observar que si u es solución de (3) entonces $\|u\|_s = \|\phi\|_s$, pues $\partial_t\|u\|_s^2 = 2Re\left\langle i\partial_x^2 u, u\right\rangle_s = 0$

3. El problema local

En esta sección se tratará el buen planteamiento local para el problema de valor inicial (1), el cual se describirá en la siguiente forma por comodidad.

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{i}{2}\partial_x^2 u + F(u),\\
u(0) &= \varphi, \qquad (8)
\end{aligned}$$

donde $F(u) = i|u|^2u - (1 + ia)u - i\gamma\overline{u}$. El siguiente teorema transforma (8) en la ecuación integral

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \tag{9}$$

en $H^{s-2}(\mathbb{R})$.

Teorema 3 *Si $s > 1/2$ entonces el problema (1) es equivalente a la ecuación integral (9). En el siguiente sentido: si $u \in C\left([0,T]; H^s\right)$ es una solución de (1), entonces u satisface (9). Recíprocamente, si $u \in C\left([0,T]; H^s(\mathbb{R})\right)$ es una solución de (9) en $H^{s-2}(\mathbb{R})$, entonces $u \in C^1\left([0,T]; H^{s-2}\right)$ y satisface (1).*

Demostración.

1. Para este análisis se ha supuesto que $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}))$ es una solución de (1) en H^{s-2}, entonces

$$\mathbb{V}(-t)u_t - \mathbb{V}(-t)\frac{i}{2}\partial_x^2 u = \mathbb{V}(-t)F(u),$$

en $H^{s-2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{V}(-t)u) = \mathbb{V}(-t)F(u),$$

integrando de 0 a t y observando que $\mathbb{V}(t)$ es un operador acotado en $H^{s-2}(\mathbb{R})$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(-t)u - \mathbb{V}(0)u(0) &= \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \\
\mathbb{V}(-t)u - \varphi &= \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \\
\mathbb{V}(-t)u &= \varphi + \int_0^t \mathbb{V}(-\tau)F(u(\tau))\,d\tau
\end{aligned}$$

luego,

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))\,d\tau \tag{10}$$

2. Se supondrá ahora que $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ es solución de (8), entonces:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{i}{2}Au(t) - F(u(t))\right\|_{s-2} = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - \frac{i}{2}Au(t) - F(u(\tau)) \right\|_{s-2} \\
&\leq \left\| \mathbb{V}(t)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)\varphi \right\|_{s-2} \\
&+ \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)F(u(\tau)) \right\|_{s-2} d\tau \\
&+ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) - F(u(t))\|_{s-2} d\tau
\end{aligned}$$

Del teorema (2) se tiene:

$$\lim_{h\to 0} \left\| \mathbb{V}(t)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)\varphi \right\|_{s-2} = 0.$$

Falta ver que:

$$\lim_{h\to 0} \int_0^t \left\| \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \tfrac{i}{2}A\right)F(u(\tau)) \right\|_{s-2} d\tau = 0 \tag{11}$$

y

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) - F(u(t))\|_{s-2}\, d\tau = 0 \tag{12}$$

Obsérvese lo siguiente (11)

$$\begin{aligned}
&\left\| \mathbb{V}(t-\tau)\left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)F(u(\tau)) \right\|_{s-2}^2 \\
&= \left\| \left(\frac{\mathbb{V}(h)-1}{h} - \frac{i}{2}A\right)F(u(\tau)) \right\|_{s-2}^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s-2} \underbrace{\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right|^2}_{i} |\widehat{F(u(\tau))}|^2 d\xi
\end{aligned} \tag{13}$$

Analizando (i) se tiene:

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right| \leq \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} \right| + \left| \frac{i\xi^2}{2} \right|$$

Por el Teorema del valor medio

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2}-1}{h} \right| \leq \left| \frac{-i}{2}\xi^2 \right| = \frac{1}{2}\xi^2$$

Entonces

$$\left| \frac{e^{\frac{-i}{2}h\xi^2} - 1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right|^2 \leq \left(\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2 \right)^2 \leq C(1+\xi^2)^2$$

Luego, (13)

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s-2} C(1+\xi^2)^2 |\widehat{F(u(\tau))}|^2 \, d\xi \\ &= C \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s} |\widehat{F(u(\tau))}|^2 \, d\xi \\ &= C\|F(u(\tau))\|_s^2 \end{aligned}$$

y como

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{e^{\frac{-i}{2}\xi^2 h} - 1}{h} + \frac{i}{2}\xi^2 \right| = 0$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene que:

$$\left\| \mathbb{V}(t-\tau) \left(\frac{\mathbb{V}(h) - 1}{h} - \frac{i}{2}A \right) F(u(\tau)) \right\|_{s-2} \longrightarrow 0, \text{si } h \longrightarrow 0$$

Ahora se tiene que (12):

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) - F(u(t)) \, d\tau \right\|_{s-2} \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) - F(u(t))\|_{s-2} \, d\tau \end{aligned}$$

para algún $\tau \in [t, t+h]$, la continuidad y el teorema del valor medio para integrales aplicados a la función continua

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{|h|} \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau)) \, d\tau - F(u(t)) \right\|_{s-2} = 0$$

A continuación se establece un resultado que es importante en la prueba del buen planteamiento local.

Lema 4 *Si u, $v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ con $s > 1/2$ entonces*

$$||F(u) - F(v)||_s \leq L(||u||_s, ||v||_s)||u - v||_s$$

donde F es dado como en (8) y L es un polinomio homogéneo de grado 2.

Demostración. Como,

$$\begin{aligned} F(u)-F(v) &= i|u|^2u-(1+ia)u-i\gamma\overline{u}-(i|v|^2v-(1+ia)v-i\gamma\overline{u}) \\ &= i(|u|^2u-|v|^2v)-(1+ia)(u-v)-i\gamma(\overline{u}-\overline{v}), \end{aligned}$$

la desigualdad triangular implica que

$$\begin{aligned} \|F(u)-F(v)\|_s &= \left\|i(|u|^2u-|v|^2v)-(1+ia)(u-v)-i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\right\|_s \\ &\leq \underbrace{\||u|^2u-|v|^2v\|_s}_{i} + |1+ia|\|u-v\|_s+|\gamma|\|\overline{u}-\overline{v}\|_s \end{aligned} \tag{14}$$

La identidad

$$|f|^2f-|g|^2g=|f|^2(f-g)+\overline{f}g(f-g)+g^2(\overline{f}-\overline{g})$$

y el hecho de ser $H^s(\mathbb{R})$ un álgebra de Banach para $s>\frac{1}{2}$ transforma (i) en:

$$\begin{aligned} \||u|^2u-|v|^2v\|_s &\leq \||u|^2(u-v)\|_s+\|\overline{u}v(u-v)\|_s+\|v^2(\overline{u}-\overline{v})\|_s \\ &\leq \|u\|_s^2\|u-v\|_s+\|\overline{u}\|_s\|v\|_s\|u-v\|_s+\|v\|^2\|\overline{u}-\overline{v}\|_s \\ &\leq \|u\|_s^2\|u-v\|_s+\|u\|_s\|v\|_s\|u-v\|_s+\|v\|_s^2\|u-v\|_s \\ &\leq \|u-v\|_s(\|u\|_s^2+\underbrace{\|u\|_s\|v\|_s}_{ii}+\|v\|_s^2) \end{aligned} \tag{15}$$

Por lo tanto (14) y (15) implican el resultado con

$$\left(\frac{3}{2}(\|u\|_s^2+\|v\|_s^2)+|1+ia|+|\gamma|\right)=L(\|u\|_s,\|v\|_s)$$

y se tiene entonces que

$$\|F(u)-F(v)\|_s\leq L(\|u\|_s,\|v\|_s)\|u-v\|_s$$

Teorema 5 *Sean $\varphi\in H^s$, donde $s>1/2$. Entonces, existen $T_s=T(\|\varphi\|_s)>0$ y $u\in C([0,T_s];H^s(\mathbb{R}))$ satisfaciendo la ecuación integral (10).*

Demostración. Sean $M,T>0$. Consideremos el espacio métrico completo definido por

$$\mathfrak{X}_s(T)=\{u\in C([0,T];H^s)\,:\,\left\|u(t)-e^{\frac{it}{2}\partial_x^2}\varphi\right\|_s\leq M,\forall t\in[0,T]\}, \tag{16}$$

dotado de la métrica $d(u,v)=\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_s=||u-v||_{\infty,s}$ y la aplicación

$$\Psi(u(t))=\mathbb{V}(t)\varphi+\int_0^t\mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))d\tau \tag{17}$$

Una parte esencial de la prueba es probar que existe $T>0$ tal que Ψ aplica $\mathfrak{X}_s(T)$ en sí mismo y es una contracción. Por tal razón se ha dividido la prueba en varias etapas, a saber:

i. $\Psi u \in C([0,T];H^s)$ si $u \in \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, esto es consecuencia de aplicar la norma de H^s a $\Psi(u(t+h)) - \Psi(u(t))$, usar (17), posteriormente aplicar la desigualdad triangular, teniendo en cuenta que $\mathbb{V}$ es un grupo unitario y que F aplica H^s en sí mismo. Finalmente, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue prueba este hecho. En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\|\Psi u(t+h) - \Psi u(t)\|_s \\
&= \left\| \mathbb{V}(t+h)\varphi + \int_0^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\ d\tau \right. \\
&\left. -\mathbb{V}(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))\ d\tau \right\|_s \\
&= \left\| (\mathbb{V}(t+h) - \mathbb{V}(t))\varphi + \int_0^t (\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau))F(u(\tau))\ d\tau \right. \\
&\left. + \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\ d\tau \right\|_s \\
&\leq \|\mathbb{V}(t+h)\varphi - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s + \left\| \int_0^t [\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)]F(u(\tau))\ d\tau \right. \\
&\left. + \int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\ d\tau \right\|_s
\end{aligned}
$$

El primer término de la desigualdad va a cero cuando h va a 0 porque $\mathbb{V}(t)$ es un grupo. Analizando el segundo termino de la desigualdad:

$$
\left\| \underbrace{\int_0^t \left[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)\right] F(u(\tau))\ d\tau}_{A} + \underbrace{\int_t^{t+h} \mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\ d\tau}_{B} \right\|_s
$$

Tomando la parte A:

$$
\begin{aligned}
\left\|\left[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)\right] F(u(\tau))\right\|_s &\leq \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \\
&+ \|\mathbb{V}(t-\tau)F(u(\tau))\|_s \\
&\leq 2\,\|F(u(\tau))\|_s\,, \quad s > 1/2
\end{aligned}
$$

Como

$$
\lim_{h\to 0} \left\|\left[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)\right] F(u(\tau))\right\|_s = 0
$$

se concluye que

$$
\lim_{h\to 0} \int_0^t \left\|\left[\mathbb{V}(t+h-\tau) - \mathbb{V}(t-\tau)\right] F(u(\tau))\ d\tau\right\|_s = 0
$$

Para la parte B, como $\mathbb{V}$ es un grupo unitario se tiene:

$$
\|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \leq \|F(u(\tau))\|_s
$$

como $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ entonces

$$\begin{aligned} \|u(\tau)\|_s &= \|u(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi + \mathbb{V}(t)\varphi\|_s \leq \|u(\tau) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s + \|\mathbb{V}(t)\varphi\|_s \\ &\leq M + \|\varphi\|_s , \end{aligned} \tag{18}$$

así,

$$\|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))\|_s \leq \|F(M + \|\varphi\|_s)\|_s$$

y por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \int_t^{t+h} \|\mathbb{V}(t+h-\tau)F(u(\tau))d\tau\|_s \, d\tau = 0$$

ii. Se tiene que existe $T_1 > 0$ tal que si $0 < T \leq T_1$ y $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ entonces $\Psi(u(t)) \in \mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, de la definición de $\mathfrak{X}_s(T)$ en (16) y la desigualdad triangular implican que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t)) - \mathbb{V}(t)\varphi\|_s &= \left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)\varphi F(u(\tau)) \; d\tau \right\|_s \\ &\leq \int_0^t \|F(u(\tau))\|_s \; d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\|u(t)\|_s , 0) \, \|u(t)\|_s \; d\tau \end{aligned} \tag{19}$$

si $u \in \mathfrak{X}_s(T)$ tenemos (18) y (19) se transforma en:

$$\begin{aligned} \|\Psi(v(\tau)) - \mathbb{V}(\tau)\varphi\|_s &\leq \int_0^t L(M + ||\varphi||_s, 0)(M + ||\varphi||_s) \; d\tau \\ &= L(M + \|\varphi\|_s , 0)(M + \|\varphi\|_s)t \\ &\leq L(M + \|\varphi\|_s , 0)(M + \|\varphi\|_s)T \end{aligned}$$

Eligiendo $T_1 = \dfrac{M}{L(M + \|\varphi\|_s , 0)(M + \|\varphi\|_s)}$, tenemos lo requerido.

iii. Existe $T_2 > 0$ tal que si $0 < T \leq T_2$, Ψ es una contracción en $\mathfrak{X}_s(T)$. En efecto, se aplica la norma de H^s a $\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))$, posteriormente la desigualdad triangular, el lema 4, la definición de $\mathfrak{X}_s(T)$ en (16) y se usa que $\mathbb{V}$ es grupo para obtener:

$$\begin{aligned} ||\Psi(u(t)) - \Psi(v(t))||_s &\leq \int_0^t \|F(u(t)) - F(v(t))\|_s \, d\tau \\ &\leq \int_0^t L(\|u(\tau)\|_s , ||v(\tau)||_s)||u(\tau) - v(\tau)||_s d\tau \\ &\leq \int_0^t L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s)||u(\tau) - v(\tau)||_s d\tau \\ &\leq L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s) \int_0^t ||u(\tau) - v(\tau)||_s d\tau \\ &\leq L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s)Td(v, w).\forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

y escogiendo,

$$T_2 < \frac{1}{L(M + ||\varphi||_s, M + ||\varphi||_s)},$$

se obtiene que Ψ es una contracción en $\mathfrak{X}_s$ si $0 < T \leq \text{mín}\{T_1, T_2\}$, de este modo i, ii, y iii implican el resultado.

Teorema 6 *La solución obtenida en el Teorema (5) es única y depende continuamente del dato inicial φ.*

Demostración. Se supondrá que $u, v \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ son soluciones de (8) con datos iniciales ψ, ϕ respectivamente. Aplicando la norma H^s a

$$u(t) - v(t) = \mathbb{V}(t)(\psi - \phi) + \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)[F(u(\tau)) - F(v(\tau))]\, d\tau,$$

se usa, la desigualdad triangular, el hecho de ser $\mathbb{V}(t)$ un grupo unitario en H^s y el lema 4, para obtener:

$$\begin{aligned} ||u(t) - v(t)||_s &\leq ||\mathbb{V}(t)(\psi - \phi)||_s + \int_0^t ||\mathbb{V}(t-\tau)[F(u(\tau)) - F(v(\tau))]||_s\, d\tau \\ &\leq ||\psi - \phi||_s + \int_0^t ||F(u(\tau)) - F(v(\tau))||_s\, d\tau \\ &\leq ||\psi - \phi||_s + \int_0^t L(||u||_s, ||v||_s)||u(\tau) - v(\tau)||_s\, d\tau \\ &\leq ||\psi - \phi||_s + L\underbrace{(||u||_{\infty,s}, ||v||_{\infty,s})}_{K}\int_0^t ||u(\tau) - v(\tau)||_s\, d\tau \qquad (20) \end{aligned}$$

La desigualdad de Gronwall aplicada a (20) implica la unicidad, pues

$$||u(t) - v(t)||_s \leq ||\psi - \phi||_s e^{Kt} \qquad (21)$$

La dependencia continua es consecuencia de la continuidad del tiempo de existencia de la solución de $||\varphi||_s$, de (16) y de (20) pero con $K = L(||\varphi||_s + M, ||\varphi_n||_s + M)$, donde $\varphi_n \to \varphi$ en H^s y u_n en vez de v, donde u_n es la solución de (8) con dato inicial φ_n. Además de observar que para n suficientemente grande $K < L(||\varphi||_s + M, 1 + ||\varphi||_s + M)$.

Teorema 7 *El problema de valor inicial (8) es localmente bien planteado en H^s para $s > 1/2$*

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata de los teoremas (5), (6) y el lema (4).

Nota: En el caso periódico, el teorema 7 es el mismo y su prueba es esencialmente la misma.

4. El problema global

El objetivo de esta sección es establecer estimativas apriori de $\|u\|_1$, con el objetivo de obtener el buen planteamiento global de (1) en $H^1(\mathbb{R})$. Con esta claridad, se puede entender:

Lema 8 *Sean $u, \varphi \in H^1(\mathbb{R})$ entonces se tiene*

$$\|u\|_0 \leq c\|\varphi\|_0$$

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_t \|u\|_0^2 &= \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 \; dx = \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\overline{u(x,t)} \; dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\overline{u(x,t)} + u(x,t)\overline{u_t(x,t)} \; dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} Re(u_t(x,t)\overline{u(x,t)}) \; dx = 2Re\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\overline{u(x,t)} \; dx \\
&= 2Re\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i}{2}u_{xx} + i|u|^2u - (1+ia)u - i\gamma\overline{u}\right)\overline{u} \; dx \\
&= 2Re\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2}u_{xx}\overline{u} + i|u|^2|u|^2 - (1+ia)|u|^2 - i\gamma\overline{u}^2 \; dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2Re\left[\frac{-i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |u_x|^2 \; dx + i\int_{-\infty}^{\infty} |u|^4 dx - \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 \; dx \right. \\
&\left. -ia\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx - i\gamma\int_{-\infty}^{\infty} (\overline{u})^2 \; dx\right] \\
&= 2Re\left[-\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx - i\gamma\int_{-\infty}^{\infty} (\overline{u})^2 \; dx\right] \\
&= -2\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx - 2Re\left[i\gamma\int_{-\infty}^{\infty} (\overline{u})^2 \; dx\right] \\
&\leq -2\|u\|_0^2 + 2Re\left[i\gamma\int_{-\infty}^{\infty} (\overline{u})^2 \; dx\right] \leq -2\|u\|_0^2 + 2\left|\gamma\int_{-\infty}^{\infty} (\overline{u})^2 \; dx\right| \\
&\leq -2\|u\|_0^2 + 2|\gamma|\int_{-\infty}^{\infty} |\overline{u}|^2 \; dx \leq -2\|u\|_0^2 + 2|\gamma|\|u\|_0^2 \leq 2(|\gamma|-1)\|u\|_0^2
\end{aligned}$$

Luego si $\gamma \leq 1$ se obtiene que:

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2$$

Pues si $\partial_t\|u\|_0^2 \leq 0$ entonces $\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2$.
Si $\gamma > 1$ entonces

$$\partial_t\|u\|_0^2 \leq 2(|\gamma|-1)\|u\|_0^2$$

Integrando de 0 a t

$$\|u\|_0^2 - \|\varphi\|_0^2 \leq 2(|\gamma| - 1)\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 \, d\tau$$
$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 + 2(|\gamma| - 1)\int_0^t \|u(\tau)\|_0^2 \, d\tau$$

Por tanto, debido a la desigualdad de Gronwall se puede concluir

$$\|u\|_0^2 \leq \|\varphi\|_0^2 e^{2t(|\gamma|-1)}$$

Teorema 9 *Si $a \geq 0$ el problema es globalmente bien puesto en $H^1(\mathbb{R})$*

Demostración. Sea

$$E = \frac{1}{2}\int [|u_x|^2 + (1 - |u|^2)|u|^2 + \gamma Re(u^2)] \, dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} + 2aE &= a\|u\|_{L^4}^4 \\
(e^{2at}E)' &= ae^{2at}\|u\|_{L^4}^4 \\
e^{2at}E(t) - E(0) &= a\int_0^t e^{2a\tau}\|u(\tau)\|_{L^4}^4 \, d\tau \\
e^{2at}E(t) &= E(0) + a\int_0^t e^{2a\tau}\|u(\tau)\|_{L^4}^4 \, d\tau \\
E(t) &= E(0)e^{-2at} + a\int_0^t e^{-2a(t-\tau)}(\|u(\tau)\|_{L^4}^4) \, d\tau
\end{aligned}$$

Si $a = 0$ entonces $E(t) = E(0)$ y:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &= \frac{1}{2}\int \{|u_x|^2 + (1 - |u|^2)|u|^2 + \gamma Re(u^2)\} \, dx \\
&\quad - \frac{1}{2}\int \{(1 - |u|^2)|u|^2 + \gamma Re(u^2)\} dx \\
&= E(0) + \int \frac{|u|^4}{2} dx - \int \frac{|u|^2}{2} dx - \frac{\gamma}{2}\int Re(u^2) \, dx \\
&\leq E(0) + \int \frac{|u|^4}{2} dx + \int \frac{|u|^2}{2} dx + \frac{|\gamma|}{2}\int |Re(u^2)| \, dx \\
&\leq E(0) + \frac{1}{2}\int |u|^4 dx + \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{|\gamma|}{2}\|u\|_0^2 \\
&\leq E(0) + \frac{|\gamma| + 1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 \\
&\leq E(0) + \frac{|\gamma| + 1}{2} C_T\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4
\end{aligned}$$

Estimando $\|u\|_{L^4}^4$

$$\|u\|_{L^4}^4 \leq \|u_x\|_0^{\theta}\|u\|_0^{1-\theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= \theta\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1-\theta}{2}\\ &= -\theta+\frac{1}{2}\\ \theta &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^4} &\leq \|u_x\|_0\|u\|_0^3\\ &\leq (\epsilon\|u_x\|_0)\left(\frac{1}{2}\|\varphi\|_0^3\right)\\ &\leq \frac{\epsilon^2\|u_x\|_0^2}{2}+\frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6\end{aligned}$$

continuando

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_x\|_0^2 &\leq E(0)+\frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2+\frac{\epsilon^2}{2}\|u_x\|_0^2+\frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6\\ \left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\right)\|u_x\|_0^2 &\leq E(0)+\frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2+\frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6\end{aligned}$$

Se escogió ϵ suficientemente pequeño

$$\frac{1}{2}-\frac{\epsilon^2}{2}=\frac{1}{4}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{4}\|u_x\|_0^2 \leq E(0)+\frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2+\frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6$$

Ahora obsérvese cuando $a>0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\right)\|u_x\|_0^2 &\leq E(0)e^{-2at}+\frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2+\frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6\\ &\quad+\left(\frac{a}{2\epsilon^2}\int_0^t e^{-2a(t-\tau)}\,d\tau\right)\|\varphi\|_0^6\\ &\quad+\frac{a\epsilon^2}{2}\int_0^t e^{-2a(t-\tau)}\|u_x(\tau)\|_0^2\,d\tau\end{aligned}$$

Como $a\geq 0$, se sabe que $e^{-2a(t-\tau)}\leq 1$ e integrando se tiene:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\right)\|u_x\|_0^2 &\leq E(0)e^{-2at}+\frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2+\frac{1}{2\epsilon^2}\|\varphi\|_0^6\\ &\quad+\frac{1}{2\epsilon^2}\left(1+\frac{1-e^{-2at}}{2}\right)\|\varphi\|_0^6+\frac{a\epsilon^2}{2}\int_0^t\|u_x(\tau)\|_0^2\,d\tau\end{aligned}$$

Sea $\left(\frac{1-\epsilon^2}{2}\right) = C_\epsilon$, luego

$$\begin{aligned}\|u_x\|_0^2 \leq \frac{1}{C_\epsilon}\Bigg[E(0)e^{-2at} + \frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|\varphi\|_0^6 \\ + \frac{1}{2\epsilon^2}\left(1+\frac{1-e^{-2at}}{2}\right)\|\varphi\|_0^6\Bigg] + \frac{a\epsilon^2}{2}\int_0^t \|u_x(\tau)\|_0^2\, d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_\epsilon}\Bigg[E(0)e^{-2at} + \frac{|\gamma|+1}{2}C_T\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon}\|\varphi\|_0^6 \\ + \frac{a}{2\epsilon}\left(1+\frac{1-e^{-2at}}{2}\right)\|\varphi\|_0^6\Bigg] = C(\varphi)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u_x\|_0^2 \leq C(\varphi) + K\int_0^t \|u_x(\tau)\|_0^2 d\tau$$

Ahora bien, aplicando Gronwall se tiene que:

$$\|u_x\|_0^2 \leq C(\varphi)e^{Kt}$$

Si $a < 0$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} + 2aE \leq 0 \\ \frac{dE}{dt} \leq -2aE(t) \\ E(t) \leq E(0) + (-2a)\int_0^t E(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Aplicando Gronwall se obtiene:

$$E(t) \leq E(0)e^{-2at}.$$

5. Teoría en $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección se estudia el buen planteamiento global de (1) en $L^2(\mathbb{R})$

Lema 10 *Si* $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *y* $q \in [1,2]$ *entonces se tiene que*

$$\mathbb{V}(t) = e^{it\Delta} : L^q(\mathbb{R}) \mapsto L^p(\mathbb{R})$$

es continua y

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq C|t|^{\frac{-1}{2(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}\|f\|_q$$

Demostración. Ver [7]

Teorema 11 *El grupo* $\{\mathbb{V}(t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ *satisface:*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\mathbb{V}(t)f\|_p^q\ dt\right)^{1/q}\leq c\|f\|_2, \tag{22}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\ d\tau\right\|_p^q dt\right)^{1/q}\leq c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|g(\cdot,t)\|_{p\prime}^{q\prime}\ dt\right)^{1/q\prime}, \tag{23}$$

y

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{V}(t)g(\cdot,\tau)\ dt\right\|_2\leq c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|g(\cdot,t)\|_{p\prime}^{q\prime}\ dt\right)^{1/q\prime}, \tag{24}$$

con $2\leq p\leq\infty$ *y* $\dfrac{2}{q}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}$ *donde* $c=c(p)$ *es una constante que depende sólo de* p*. Se usará la notación*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p\prime}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q\prime}=1$$

Demostración. Ver [7].

Teorema 12 *Si* $u\in L^2(\mathbb{R})$ *existe* $T=T(\|\varphi\|_0)>0$ *y una única solución* u *de la ecuación integral (10) en* $[-T,T]$ *con*

$$u\in C([-T,T];L^2(\mathbb{R}))\cap L^8([-T,T];L^4(\mathbb{R})) \tag{25}$$

Además, para todo $T'<T$ *existe una vecindad* V *de* φ *en* $L^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\mathbb{F}:V\longmapsto C([-T',T'];L^2(\mathbb{R}))\cap L^8([-T,T];L^4(\mathbb{R})),$$

$$\widetilde{\varphi}\longmapsto\widetilde{u(t)},$$

es Lipschitz.

Demostración. Para esta demostración, es importante considerar el espacio métrico completo

$$E(T,b)=\Bigg\{u\in C([-T,T],L^2(\mathbb{R}))\cap L^8([-T,T],L^4(\mathbb{R})):$$

$$|||u|||_T=\sup_{[-T,T]}\|v(t)\|_0+\left(\int_{-T}^{T}\|v(t)\|_{L^4}^8\ dt\right)^{1/8}\leq b\Bigg\}$$

dotado de la métrica

$$d(u,v)=|||u-v|||_T.$$

Por tanto obsérvese que si se elige $T>0$ adecuadamente se obtiene que

$$\Psi:E(T,b)\longrightarrow E(T,b)$$

es una contracción; donde Ψ está dada por

$$\Psi(u) = e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}\varphi + \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}}(i|u|^2u + (1+ia)u + i\gamma\overline{u})\ d\tau \tag{26}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} \\
&\leq \left(\int_0^T \|e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}\varphi\|_{L^4}^8\right)^{1/8} + \left(\int_0^T \left\|\int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}}F(u(\tau))d\tau\right\|_{L^4}^8 dt\right)^{1/8}
\end{aligned}$$

Tomando en el teorema 11 con $p = 4$ y $q = 8$ se tiene entonces que $p' = \frac{4}{3}$ y $q' = \frac{8}{7}$ y por las desigualdades (22) y (24) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} &\leq \|\varphi\|_0 + \underbrace{\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)i|u|^2u\ d\tau\right\|_{L_x^4L_T^8}}_{C} \\
&+ \underbrace{\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + i\gamma\overline{u}\ d\tau\right\|_{L_x^4L_t^8}}_{D}
\end{aligned}$$

Analizando C, se tiene que:

$$\||u|^2u\|_{L^{4/3}} = \left(\int ||u|^2u|^{4/3}\right)^{3/4} = \left(\int |u|^4\right)^{3/4} = \|u\|_{L_x^4}^3 \tag{27}$$

Analizando D, sea $g(x,\tau) = (1+ia)u + i\gamma\overline{u}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + i\gamma\overline{u}\ d\tau\right\|_{L_x^4L_t^8} &= \left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\chi_{[0,t]}\ d\tau\right\|_{L_x^4L_t^8} \\
&\leq \left\|\int_0^T \chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4}d\tau\right\|_{L_T^8} \\
&\leq \int_0^T \left\|\chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4}\right\|_{L_T^8}\ d\tau \\
&\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4L_T^8}\ d\tau \\
&\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t)\mathbb{V}(-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4L_T^8}\ d\tau \\
&\leq C(a,\lambda)\int_0^T \underbrace{\|g(\cdot,\tau)\|_0}_{\|u\|_0}\ d\tau
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(\int_0^T \|\Psi(u)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} = \|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8}$$
$$\leq \|\varphi\|_0 + \underbrace{\left(\int_0^T (\|u(t)\|_{L_x^4}^3)^{8/7}\right)^{7/8}}_{E} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \, d\tau$$

Aplicando Hölder a E se obtiene:

$$\left(\int_0^T \|u(t)\|_{L_x^4}^{24/7} \, dt\right)^{7/8} \leq \left[\left(\int_0^T 1^{7/4} \, dt\right)^{4/7} \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 d\tau\right)^{3/7}\right]^{7/8}$$
$$\leq \left(\int_0^T \, dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 \, d\tau\right)^{3/8}$$
$$\leq T^{1/2} \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 \, d\tau\right)^{3/8}$$

Luego:

$$\|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} \leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} \left(\int_0^T \|u(\tau)\|_{L_x^4}^8 \, d\tau\right)^{3/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \, d\tau$$
$$\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} \|u(\tau)\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \, d\tau$$

Entonces, si $u \in E(T, b)$ se tiene:

$$\|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} \leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} b^3 + Tb \tag{28}$$

Usando (24) y las propiedades del grupo unitario en la expresión (26), se puede obtener:

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau) i|u|^2 u \; d\tau \right\|_0 \\
&\quad + \left\| \int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)u + \gamma \overline{u} \; d\tau \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_0 + \left(\int_0^T \||u|^2 u\|_{L^{4/3}}^{8/7} \; d\tau \right)^{7/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \; d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_0 + \left(\int_0^T \|u\|_{L^4}^{24/7} \; d\tau \right)^{7/8} + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \; d\tau \\
&\leq \|\varphi\|_0 + T^{1/2} \|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + \int_0^T \|u(\tau)\|_0 \; d\tau \\
\sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \sqrt{T} \|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + T \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 \\
\sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 + \sqrt{T} b^3 + Tb
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_{L_x^4 L_T^8} + \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 &\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} \|u\|_{L_x^4 L_T^8}^3 + 2T \sup_{[-T,T]} \|u(t)\|_0 \\
&\leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} b^3 + 2Tb \leq b
\end{aligned}$$

Así,

$$|||\Psi(u)|||_T \leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T} b^3 + 2Tb \leq b$$

Si $b = 3\|\varphi\|_0$ y tomando $T > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u)|||_T \leq 2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}(3\|\varphi\|_0)^3 + 2T(3\|\varphi\|_0) &\leq 3\|\varphi\|_0 \\
2\|\varphi\|_0 + 2\sqrt{T}(3\|\varphi\|_0)^3 + 2T(3\|\varphi\|_0) &\leq 3\|\varphi\|_0 \\
2\|\varphi\|_0 + 54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^3 + 6T\|\varphi\|_0 &\leq 3\|\varphi\|_0 \\
54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^3 + 6T\|\varphi\|_0 &\leq \|\varphi\|_0 \\
54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^2 + 6T &\leq 1 \qquad (29) \\
54\sqrt{T}\|\varphi\|_0^2 + 6T - 1 &\leq 0 \\
\sqrt{T} &\leq \frac{-54\|\varphi\|_0^2 + \sqrt{(54)^2\|\varphi\|_0^4 + 24}}{12} \\
T &\leq \left(\frac{-54\|\varphi\|_0^2 + \sqrt{(54)^2\|\varphi\|_0^4 + 24}}{12} \right)^2
\end{aligned}$$

entonces $\Psi(u) \in E(T,b)$; por lo tanto la aplicación Ψ está bien definida sobre $E(T,b)$.
Ahora si $u,\ v\ \in E(T,b)$

$$(\Psi(u)-\Psi(v))(t) = \int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)[(i|u|^2u+(1+ia)u+i\gamma\overline{u})-(i|v|^2v+(1+ia)v+i\gamma\overline{v})]\ d\tau$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \|(\Psi(u)-\Psi(v))(t)\|_4^8\right)^{1/8} \\
&\leq \left(\int_0^T \left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)(i|u|^2u+(1+ia)u+i\gamma\overline{u})\right.\right. \qquad (30)\\
&\left.\left. -\,(i|v|^2v+(1+ia)v+i\gamma\overline{v})\ d\tau\right\|_{L_x^4}^8 dt\right)^{1/8} \\
&\leq \left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)i(|u|^2u-|v|^2v)\right. \\
&\left. +(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\ d\tau\right\|_{L_x^4L_T^8} \\
&\leq \underbrace{\left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(i|u|^2u-i|v|^2v)\ d\tau\right\|_{L_x^4L_T^8}}_{F} \\
&+\underbrace{\left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\ d\tau\right\|_{L_x^4L_t^8}}_{G}
\end{aligned}$$

Analizando F se tiene que:

$$\begin{aligned}
\||u|^2u-|v|^2v\|_4 &\leq \|u-v\|_4\left(\|u\|_4^2+\frac{\|u\|_4^2}{2}+\frac{\|v\|_4^2}{2}+\|v\|_4^2\right) \\
&\leq \|u-v\|_4\left(\frac{3}{2}\|u\|_4^2+\frac{3}{2}\|v\|_4^2\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\|u\|_{L^4}^2+\|v\|_{L^4}^2\right)\|u-v\|_{L^4}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-\tau)(i|u|^2u-i|v|^2v)\ d\tau\right\|_{L_x^4L_T^8} \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\int_0^T \left(\|u\|_{L^4}^2+\|v\|_{L^4}^2\right)^{8/7}\|u-v\|_{L^4}^{8/7}\right)^{7/8}
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando Hölder se tiene que:

$$\leq C\left\{\int_0^T (\|u\|_{L^4}^8\ dt)^{1/4} + \int_0^T (\|v\|_{L^4}^8 dt)^{1/4}\right\}\int_0^T \left(\|u-v\|_{L^4}^8\ dt\right)^{1/8}$$
$$\leq C\sqrt{T}b^2\int_0^T \left(\|u-v\|_{L^4}^8\ dt\right)^{1/8}$$

Analizando G, Sea $h(x,t) = (1+ia)(u-v) + i\gamma(\overline{u}-\overline{v})$ entonces:

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)[(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})]\ d\tau\right\|_{L_x^4L_t^8}\\
&= \left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\chi_{[0,t]}\ d\tau\right\|_{L_x^4L_t^8}\\
&\leq \left\|\int_0^T \chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4}\ d\tau\right\|_{L_T^8}\\
&\leq \int_0^T \left\|\chi_{[0,t]}\|\mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4}\right\|_{L_T^8}\ d\tau\\
&\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4L_T^8}\ d\tau\\
&\leq \int_0^T \|\mathbb{V}(t)\mathbb{V}(-\tau)h(\cdot,\tau)\|_{L_x^4L_T^8}\ d\tau\\
&\leq \int_0^T \|h(\cdot,\tau)\|_0\ d\tau\\
&= \int_0^T \|(1+ia)(u-v)+i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\|_0\ d\tau\\
&\leq \int_0^T \|(1+ia)(u-v)\|_0 d\tau + \int_0^T \|i\gamma(\overline{u}-\overline{v})\|_0\ d\tau\\
&\leq (|1+ia|+|\gamma|)\int_0^T \|u-v\|_0\ d\tau
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(\int_0^T \|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{L^4}^8\right)^{1/8} = \|\Psi(u)-\Psi(v)\|_{L_x^4L_T^8}$$
$$\leq C\sqrt{T}b^2\int_0^T \left(\|u-v\|_{L^4}^8\ dt\right)^{1/8} + (|1+ia|+|\gamma|)\int_0^T \|u-v\|_0\ d\tau$$
$$\leq C\sqrt{T}|||u-v||| + CT|||u-v|||$$

Combinando (24) y las propiedades de un grupo unitario se observa que:

$$\sup_{[0,T]} \|(\Psi(u)-\Psi(v))(t)\|_0 \leq (C\sqrt{T}+CT)|||u-v|||$$

Finalmente, por medio de la escogencia de b, de la desigualdad (29) se concluye que:

$$C\sqrt{T}b^2 \leq C\sqrt{T}\|\varphi\|_0^2 < 1$$

Así,

$$T \simeq \|\varphi\|_0^{-4}$$

Se ha probado la existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación (9). Para probar la continuidad de $\Psi(u) = \Psi(\varphi)$ con respecto a φ, es importante observar que si u, v son las soluciones de (9) correspondientes a los datos φ, ϕ entonces

$$u(t) - v(t) = e^{\frac{it\partial_x^2}{2}}(\varphi - \phi) + \int_0^t e^{\frac{i(t-\tau)\partial_x^2}{2}}(i|u|^2u + (1+ia)u + i\gamma\overline{u})\, d\tau$$

y así con el mismo argumento usando en (30) se tiene que

$$\left(\int_0^T \|u(t) - v(t)\|_{L_4}^8\, dt\right)^{1/8} \leq C\|\varphi - \phi\| + K\sqrt{T}(\|\varphi\|_0^2 + \|\phi\|_0^2)$$

En consecuencia, si $\|\varphi - \phi\|_0$ es suficientemente pequeño, entonces

$$\left(\int_0^T \|u(t) - v(t)\|_{L_4}^8\, dt\right)^{1/8} \leq K\|\varphi - \phi\|_0$$

En forma análoga también se puede probar que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_0 \leq K\|\varphi - \phi\|_0$$

lo cual completa la prueba del teorema.

Teorema 13 *Si $u_0 \in L^2$ entonces (1) es globalmente bien planteado.*

Demostración. Es consecuencia del teorema anterior y de $\|u\|_0 \leq \|\varphi\|_0$.

Este tipo de resultado en el caso periódico no fue posible obtenerlo con este tipo de técnica, pues no tiene estimativas del tipo L_pL_q.

Referencias

[1] Promislow K., Kutz J. N.: Bifurcation and asymptotic stability in the large detuning limit of the optival parametric oscillator, Nonlinearity 13, (2000), pp.675-698.

[2] Duoandikoetxea J.: Análisis de Fourier, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, (1991).

[3] Rafael. J. Iório, Jr., Valèria de Magalhñes Iório: Fourier Analysis and Partial Differential Equations, Cambridge studies in avanced mathematics, 70, (2001).

[4] Ponce G.:, Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales de evolución. Universidad del Valle, Escuela de verano en ecuaciones diferenciales, geometría diferencial y análisis numérico, 1993.

[5] Wang X.: Parametrically excited nonlinear waves and their localizations. Phys. D 154, (2001), 337-359

[6] Chang P. A. C. , Promislow K.: Nonlinear stability of oscilatoty pulses in the parametric nonlinear Schrödinger equation. Nonlinearity, 20, (2007), pp. 743-763.

[7] Linares F., Ponce G.: Introducion to nonlinear dispersive equations. Springer, Universitext, (2009).